۷

جریان الکتریکی

رسانا ماده‌ای است که در آن حامل‌های بار تحت تاثیر میدانهای الکتریکی پایا، آزادی حرکت دارند. بارهای متحرک تشکیل جریان می‌دهند و فرآیندی که در آن بار انتقال می‌یابد رسانش نام دارد. جریان I به صورت آهنگ انتقال بار از سطح معینی در دستگاه رسانا (مثلاً، از مقطع مفروضی از یک سیم) تعریف می‌شود. بنابراین:

$$I=\frac{dQ}{dt} \qquad (۱-۷)$$

یکای جریان در دستگاه mks آمپر (A) است.

$$\text{یک آمپر}=\frac{\text{یک کولن}}{\text{یک ثانیه}}$$

چگالی جریان: معادله پیوستگی

برای محیط رسانایی که فقط یک نوع حامل بار الکتریکی q دارد، جریانی که از سطح da می‌گذرد برابر است با:

$$dI=\frac{dQ}{dt}=Nq\vec{V}.\hat{n}da \qquad (۲-۷)$$

اگر بیش از یک نوع حامل بار وجود داشته باشد، هر یک از انواع حامل‌ها سهمی‌نظیر رابطه بالا در تولید جریان خواهند داشت، بنابراین جریانی که از سطح da می‌گذرد عبارت است از:

$$dI=\left[\sum_i N_i\, q_i\, \vec{V}_i\right].\hat{n}da \qquad (۳-۷)$$

مقدار داخل کروشه برداری است که دارای بعد جریان بر واحد سطح است.این کمیت را چگالی بار می‌نامند و با نماد J نمایش می‌دهند:

$$J=\sum_i N_i\, q_i\, V_i \qquad (۴-۷)$$

چگالی جریان یک تابع نقطه‌ای برداری است و یکای J در دستگاه mks آمپر بر مترمربع $(\frac{A}{m^۲})$ است. چگالی جریان J و چگالی بار ρ کمیتهای مستقل از یکدیگر نیستند، بلکه در هر نقطه با یک معادله دیفرانسیل به هم مربوط می‌شوند.این معادله به معادله پیوستگی معروف است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \qquad (۵-۷)$$

قانون اهم: رسانندگی

در هر فلز در دمای ثابت چگالی J به طور خطی با میدان الکتریکی متناسب است، بنابراین معادله ساختمندی به صورت زیر است:

$$\vec{J}=g\vec{E} \qquad (۶-۷)$$

ثابت تناسب یعنی g را رسانندگی می‌نامند.این معادله برای محیط‌های خطی همسانگرد یا محیط‌های اهمی‌صادق است. و در حالت کلی برای مواد همسانگرد باید از معادله زیر استفاده کرد:

$$\vec{J}=g(E)\vec{E} \qquad (۷-۷)$$

که در آن $g(E)$ تابعی از میدان الکتریکی است.

مقاومت یک رسانای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت برابر است با:

$$R=\frac{l}{gA} \qquad (۸-۷)$$

و قانون اهم برای آن:

$$\Delta\varphi=RI \qquad (۹-۷)$$

در حالت کلی، R به مقدار این جریان بستگی خواهد داشت، ولی ما اصولاً به مواد رسانای خطی علاقه‌مندیم که مواد اهمی‌نامیده می‌شوند، در مورداین مواد R به جریان بستگی ندارد.

کار انجام شده توسط میدان، هنگامی‌که بار dQ در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ عبور کند، برابر است با $dW=dQ\,\Delta\varphi$ وان مربوط برابر است با:

$$P=I\,\Delta\varphi=I^۲R=\frac{(\Delta\varphi)^۲}{R} \qquad (۱۰-۷)$$

این توان به صورت گرمای ژول در جسم تلف می‌شود.

جریانهای پایا در محیطهای پیوسته

محیطی رسانا، همگن واهمی(خطی) را در نظر بگیرید که تحت شرایط رسانش حالت پایا قرار دارد. چون صرفاً با حالت پایا سروکار داریم، چگالی بار موضعی $\rho(x,y,z)$ مقدار حالت تعادل خود را دارد و در هر نقطه محیط $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ است، بدین ترتیب معادله پیوستگی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \qquad (۱۱-۷)$$

Physicsclass.blogsky.com

و از به کار بردن قانون اهم برای محیط همگن و ترکیب آن با رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

$$\vec{\nabla}.g\vec{E}=0 \rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E}=0 \qquad (۷-۱۲)$$

و چون برای میدان ساکن $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$، بنابراین:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi \qquad (۷-۱۳)$$

از ترکیب این معادلات نتیجه می‌شود که:

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (۷-۱۴)$$

بنابراین می‌بینیم که مسئله رسانش حالت پایا را می‌توان به همان روش مسائل الکتروستاتیکی حل کرد.

شرایط مرزی کافی برای حل مسئله شرایطی است که φ یا $\vec{J}$ را در هر نقطه روی سطح محیط رسانا مشخص می‌کند. و چون دو بردار $\vec{E},\vec{J}$ با قانون اهم مربوط می‌شوند، مشخص کردن $\vec{J}$ بر روی سطح رسانا معادل است با مشخص کردن $\vec{E}$ بر روی آن سطح. به محض آنکه پاسخ مناسب معادله لاپلاس پیدا شد، $\vec{E}$ (و در نتیجه $\vec{J}$) را می‌توان در هر نقطه داخل محیط با محاسبه گردایان تعیین کرد.

در رسانش حالت پایا، مؤلفه قائم $\vec{J}$ در عبور از فصل مشترک باید پیوسته باشد، یعنی:

$$J_{1n}=J_{2n} \quad , \quad g_1E_{1n}=g_2E_{2n} \qquad (۷-۱۵)$$

و چون در هر یک از دو محیط ساکن است:

$$E_{1t}=E_{2t} \qquad (۷-۱۶)$$

در واقع شرایط موازی برای $\vec{E}$ همان شرایط مرزی در محیط دی‌الکتریک است و شرایط مرزی مربوط به $\vec{J}$ با شرایط مربوط به $\vec{D}$ یکسان‌اند. در نتیجه بین دو الکترود که در محیطی نامتناهی جا داده شده‌اند، داریم:

$$RC=\varepsilon/g \qquad (۷-۱۷)$$

این رابطه برای هر محیط منفردی با رسانندگی g و ثابت دی‌الکتریک ε صادق است.

نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی

یک محیط همگن و همسانگرد را که با رسانندگی g و گذردهی ε مشخص شده و چگالی حجمی‌بار از پیش تعیین شده آن برابر $f_0(x,y,z)$ است، در نظر می‌گیریم. اگر این دستگاه رسانا را ناگهان از میدانهای الکتریکی وارد بر آن جدا کنیم، به سمت تعادل که در آن هیچ بار اضافی در درون دستگاه وجود ندارد، میل می‌کند. می‌توان ثابت کرد که نزدیک شدن به حالت تعادل به طور نمایی صورت می‌گیرد:

$$\rho(x,y,z)=\rho_0(x,y,z)e^{-g/\varepsilon\, t} \qquad (۷-۱۸)$$

از معادله بالا پیداست که مقدار $\frac{\varepsilon}{g}$ دارای بعد زمان است. این مقدار را ثابت زمانی یا زمان واهلش t_c محیط می‌نامند:

$$t_c=\frac{\varepsilon}{g}=\varepsilon\eta \qquad (۷-۱۹)$$

ثابت زمانی معیاری است که نشان می‌دهد محیط رسانا با چه سرعتی به حالت تعادل الکتروستاتیکی نزدیک می‌شود. در واقع t_c، مدت زمانی است که طی آن بار در هر ناحیه مشخصی به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد. این زمان برای فلزات در حدود $10^{-14}s$ است و برای رساناهای ضعیف ترممکن است به چندین ماه نیز برسد.

شبکه‌های مقاومت و قوانین کیر شهوف

برای مدارهای الکتریکی، معادلات ساکن $\vec{\nabla}.\vec{J}=0$ ، $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ به قوانین کیرشهوف تبدیل می‌شوند. قانون اول کیرشهوف: جمع جبری جریانهایی که به یک نقطه انشعاب وارد می‌شوند صفراست، یعنی:

$$\sum I_j=0 \qquad (۷-۲۰)$$

قانون دوم کیرشهوف: جمع جبری اختلاف پتانسیلهای دور هر حلقه از شبکه برابر است با صفر، یعنی:

$$\sum V_j=0 \qquad (۷-۲۱)$$

اگر جهت مفروض جریان به سمت نقطه انشعاب مورد بحث باشد، جریان مثبت در نظر گرفته می‌شود و اگر این جریان به سمت دورشدن از نقطه اتصال باشد، منفی در نظر گرفته می‌شود. و در به کار بردن معادلات حلقه، یک جهت (ساعتگرد یا پادساعتگرد) برای پیمودن حلقه باید انتخاب شود. هر ولتاژ اعمال شده‌ای را که بتواند (به خودی خود) در جهت پیمودن حلقه جریانی مثبت ایجاد کند، مثبت فرض می‌کنیم. هرجمله IR را، چنانچه جریانی که از مقاومت وابسته به آن عبور می‌کند در جهت پیمودن حلقه باشد، مثبت در نظر می‌گیریم.

نظریه میکروسکوپی رسانش

در نظریه میکروسکوپی رسانش اهمی، علاوه بر نیروی الکتریکی شتاب دهنده یک نیروی کند کننده خطی که بر بارهای آزاد موجود در محیط وارد می‌شود، نیز وارد می‌شود. اگر نتیجه این نظریه را بر حسب زمان و اهلش τ بیان کنیم، داریم:

$$g=\frac{Nq^2\tau}{m} \qquad (۷-۲۲)$$

زمان τ عبارت است از ثابت زمانی مربوط به برقرار شدن موضعی یک جریان اهمی پس از اعمال میدان، در موارد عملی τ کوتاه است ($10^{-14}S$ در فلزات). در رساناهای الکترونی خوب (فلزات، نیمه رساناها)، τ به عنوان فاصله زمانی میانگین بین برخوردها تعبیر می‌شود. نیز وارد می‌شود. دراین مورد τ به مسافت آزاد میانگین الکترونی، به صورت زیر بستگی دارد.

$$\tau=\frac{L}{V_T} \qquad (۷-۲۳)$$

که در آن V_T سرعت گرمایی کاتوره‌ای است.

Physicsclass.blogsky.com

مسائل فصل هفتم

۷-۱- حداکثر جریانی که می‌تواند از سیمی‌مسی به سطح مقطع $۲mm^۲$ بگذرد، $۲۰A$ است.

(الف) چگالی جریان مربوط، بر حسب $\frac{A}{m^۲}$ چقدر است؟

(ب) با این فرض که از هر اتم مس یک الکترون در رسانش شرکت می‌کند، سرعت سوق الکترونی مربوط به این چگالی جریان را محاسبه کنید. (عدد آووگادرو: اتم درمول $N_\circ=۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$، وزن اتمی‌مس: ۶۳/۵، چگالی مس: $۸/۹۲\frac{g}{cm^۲}$).

(ج) با استفاده از رسانندگی تجربی، زمان برخورد میانگین یک الکترون در مس را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$J=\frac{I}{A}=\frac{۲۰}{۲\times۱۰^{-۶}(m^۲)}=۱۰^۷\frac{A}{m^۲}$$

ب)

$$\left.\begin{aligned}&\vec{J}=Nq\vec{V}\rightarrow V=\frac{J}{Nq}\\&N=N_\circ\frac{\rho}{m}=۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\times\frac{۸/۹۲}{۶۳/۵}=۸/۴۵\times۱۰^{۲۸}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$V=\frac{۱۰^۷}{۸/۴۵\times۱۰^{۲۸}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۷/۳۹\times۱۰^{-۴}(\frac{m}{s})$$

ج)

$$\left.\begin{aligned}&g=\frac{Nq^۲T}{m}\\&g=\frac{۱}{\eta}\\&\eta=۱/۶۷\times۱۰^{-۸}(\Omega m)\ \text{(در جدول ۷-۱)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{۱}{\eta}=\frac{Nq^۲\tau}{m}$$

$$\Rightarrow\tau=\frac{m}{\eta Nq^۲}=\frac{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۸}\times۸/۴۵\times۱۰^{۲۸}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$

$$\tau=۲/۵۱۷\times۱۰^{-۱۴}(S)$$

۷-۲- رسانندگی آب دریا تقریباً $۴/۳(\Omega m)^{-۱}$ است. چگالی جریان را در سلولی به طول $۲cm$ و سطح مقطع $۱cm^۲$ از آب دریا، هنگامی‌که اختلاف پتانسیل $۴V$ به دو سر آن اعمال شود، پیدا کنید. سرعت سوق میانگین را محاسبه کنید. فرض کنید که غلظت یونها ۲ درصد غلظت مولکول‌های آب است.

حل:

$$R=\frac{۱}{g}\frac{l}{A}=\frac{۱}{۴/۳}\frac{۲\times۱۰^{-۲}}{۱\times۱۰^{-۴}}=۴۶/۵\ (\Omega)$$

$$\Delta\varphi=IR\ \Rightarrow\ I=\frac{\Delta\varphi}{R}=\frac{۴}{۴۶/۵}=۰/۰۸۶A$$

$$J=\frac{I}{A}=\frac{۰/۰۸۶}{۱\times۱۰^{-۴}}=۸۶۰A/m^۲$$

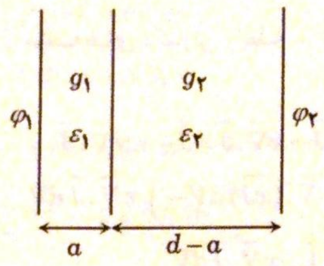
$$J=NqV$$

$$N=(\frac{۲}{۱۰۰})N_\circ\frac{\rho}{M}=(\frac{۲}{۱۰۰})(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})\frac{۱۰۰۰gr/m^۳}{۱۸(gr/mol)}=۰/۶۷\times۱۰^{۲۴}$$

$$V=\frac{J}{Nq}=\frac{۸۶۰}{(۶۷\times۱۰^{۲۲})\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}=۸/۰۲\times۱۰^{-۳}(m/s)$$

۷-۳- دو صفحه فلزی مسطح نامتناهی و موازی به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. فضای بین آنها با دو محیط رسانا پر شده است و فصل مشترک دو محیط صفحه‌ای است موازی با صفحات فلزی. محیط اول (رسانندگی $g_۱$، گذردهی $\varepsilon_۱$) به ضخامت a و محیط دوم (رسانندگی $g_۲$، گذردهی $\varepsilon_۲$) به ضخامت $d-a$ است. صفحات فلزی به ترتیب در پتانسیل‌های $\varphi_۱$، $\varphi_۲$ قرار دارند. در حالت پایا، (الف) پتانسیل فصل مشترک دو محیط چقدر است؟ و (ب) چگالی سطحی بار بر روی این فصل مشترک چقدر است؟

حل:



(الف) چون فرض شده صفحات نامتناهی هستند بنابراین میدان E در جهت عمود بر صفحات (صفحات هم پتانسیل) است و تابعی X,Z نیست. و چون در حالت پایا هستیم، در واقع هیچ انباشت باری نباید صورت گیرد، بنابراین E تابعی از y نیز نیست.

$$\Delta\varphi=\varphi_۱-\varphi_۲=-\int\vec{E}.d\vec{l}=E_۱a+E_۲(d-a)\qquad(۱)$$

$$J_{۱n}=J_{۲n}\Rightarrow J_۱=J_۲\Rightarrow g_۱E_۱=g_۲E_۲$$

$$\Rightarrow E_۱=\frac{g_۲}{g_۱}E_۲\qquad(۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{g_۲}{g_۱}E_۲a+E_۲(d-a)=\varphi_۱-\varphi_۲\rightarrow E_۲=\frac{\varphi_۱-\varphi_۲}{\frac{g_۲}{g_۱}a+(d-a)}\qquad(۳)$$

$$E_۱=\frac{g_۲}{g_۱}E_۲\ \Rightarrow\ E_۱=\frac{\varphi_۱-\varphi_۲}{a+\frac{g_۱}{g_۲}(d-a)}\qquad(۴)$$

اگر پتانسیل فصل مشترک را φ_{int} بنامیم داریم:

$$\varphi_۱-\varphi_{int}=-\int\vec{E}.d\vec{l}=E_۱a\ \rightarrow\varphi_{int}=\varphi_۱-E_a$$

با جایگذاری رابطه (۴) داریم:

$$\varphi_{int}=\varphi_۱-\frac{\varphi_۱-\varphi_۲}{a+\frac{g_۱}{g_۲}(d-a)}a=\frac{g_۱\varphi_۱(d-a)+g_۲\varphi_۲a}{g_۲a+g_۱(d-a)}$$

Physicsclass.blogsky.com

ب)

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \Rightarrow \varepsilon_2 E_2-\varepsilon_1 E_1=\sigma$$

با جایگذاری روابط (۳)،(۴) داریم:

$$\sigma=\varepsilon_2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{g_2 a+g_1(d-a)}g_1-\varepsilon_1\frac{\varphi_1-\varphi_2}{g_2 a+g_1(d-a)}g_2$$

$$=\frac{\varepsilon_2 g_1-\varepsilon_1 g_2}{g_2 a+g_1(d-a)}(\varphi_1-\varphi_2)$$

۷-۴ - دستگاهی از بارها و جریانهای الکتریکی کاملاً در درون حجم ثابت V محصور است. گشتاور دو قطبی توزیع بار - جریان (بخش ۲-۹) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{P}=\int_V \vec{r}\rho dV$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان نسبت به یک مبدأ ثابت است. ثابت کنید که:

$$\int_V \vec{J} dV=\frac{d}{dt}\vec{P}$$

راهنمایی: ابتدا اتحاد $\int_V \vec{J} dV=\oint_s \vec{r}\vec{J}.\hat{n} da-\int_V \vec{r}\vec{\nabla}.\vec{J} dV$ را ثابت کنید و توجه داشته باشید که $\vec{J}$ بر روی سطح s صفر می‌شود.

حل: ابتدا برای یکی از مؤلفه‌های دکارتی رابطه ... $=\int \vec{J} dV$ را ثابت می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}.(x\vec{J})=\vec{\nabla} x.\vec{J}+x\vec{\nabla}.\vec{J}=J_x+x\vec{\nabla}.\vec{J}$$

$$\int_v J_x dV=\int_V\vec{\nabla}.(x\vec{J})dV-\int x\vec{\nabla}.\vec{J} dV$$

$$=\oint_s x\vec{J}.\hat{n} da-\int_V x\vec{\nabla}.\vec{J} dV$$

به همین ترتیب برای مولفه‌های z, y ثابت می‌شود، بنابراین:

$$* \quad \int\vec{J} dV=-\int_V r\vec{\nabla}.\vec{J} dV=\int_V\vec{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=\frac{d}{dt}\int_V\vec{r}\rho dV$$

چون $\vec{J}$ بر روی سطح s صفر است، انتگرال سطحی صفر شده است.

گشتاور دو قطبی توزیع بار:

$$\vec{P}=\int\vec{r} dq_P=\int\vec{r}\rho_P dV+\int\vec{r}\sigma_P da$$

بنابراین رابطه * به صورت زیر در می‌آید:

$$\int\vec{J} dV=\frac{d}{dt}\int\vec{r}\rho dV=\frac{d}{dt}\vec{P}$$

۷-۵ - محیطی رسانا در میدان یکنواخت E_0 قرار دارد. حفره‌ای کروی به شعاع a در محیط ایجاد کرده‌ایم.

الف) پتانسیل داخل و خارج حفره را پیدا کنید.

ب) بار سطحی که بر سطح حفره ظاهر می‌شود، چقدر است؟

ج) خطوط میدان را رسم کنید.

حل: الف) بدلیل تقارن حاکم، پتانسیل به زاویه سمتی بستگی ندارد، بنابراین:

$$\rho=0 \to \nabla^2\varphi(r,\theta)=0 \to \varphi(r,\theta)=A_0+\frac{B_0}{r}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})p_n(\cos\theta)$$

چون باری وجود ندارد $(q=0)$، بنابراین $B_0=0$ است، بنابراین پتانسیل داخل و خارج حفره به صورت زیراست:

$$\varphi_{in}=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})p_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{out}=\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n r^n+B'_n r^{-(n+1)})p_n(\cos\theta)$$

چون در بینهایت $\vec{E}=E\hat{k},(r\to\infty)$, $\varphi=\varphi(z)$ است، پس در نزدیکی هم تابعی از z است، بنابراین در φ_{out} فقط جملات cos ی را در نظر می‌گیریم و بدلیل شرط موازی $(\varphi_{in}=\varphi_{out})$ فقط جملات شامل $\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم.

$$\varphi_{in}(r,\theta)=A_1 r\cos\theta+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi_{out}(r,\theta)=A'_1 r\cos\theta+\frac{B'_1}{r^2}\cos\theta$$

برای بدست آوردن‌این ضرایب، شرایط مرزی حاکم را اعمال می‌کنیم:

$$\varphi_{in}(r\to 0) \nRightarrow \infty \Rightarrow B_1=0$$

$$\varphi_{out}(r\to\infty)=-E_0 r\cos\theta \Rightarrow A'_1=-E_0$$

$$\varphi_{in}(r=a)=\varphi_{out}(r=a) \Rightarrow A_1 a\cos\theta$$

$$=-E_0 a\cos\theta+\frac{B'_1}{a^2}\cos\theta \Rightarrow A_1=-E_0+\frac{B'_1}{a^3}$$

$$J_{1n}=J_{2n} \Rightarrow g_1 E_{1n}=g_2 E_{2n}= \xrightarrow{g_1=0} E_{2n}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r}\Big|_{r=a}=0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow -E_0 \cos\theta-2\frac{B'_1}{a^3}\cos\theta=0 \Rightarrow E_0+2\frac{B'_1}{a^3}=0$$

$$\Rightarrow B'_1=-\frac{E_0 a^3}{2}$$

$$\Rightarrow A_1=-E_0-\frac{E_0 a^3}{2a^3}=\frac{-3}{2}E_0$$

بنابراین پتانسیلهای داخل و خارج حفره برابر هستند با:

$$\varphi_{in}(r,\theta)=-\frac{3}{2}E_0 r\cos\theta$$

$$\varphi_{out}(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta-\frac{E_0 a^3}{2r^2}\cos\theta$$

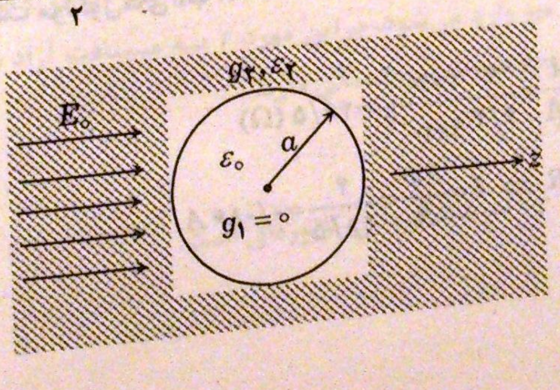
ب)

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \to \varepsilon_2 E_{2n}-\varepsilon_0 E_{1n}$$

$$=\sigma \xrightarrow{(1)} 0-\varepsilon_0 E_{1n}=\sigma$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0\left(\frac{-\partial\varphi_{in}}{\partial r}\right)=\sigma \Rightarrow \varepsilon_0\left(-\frac{3}{2}E_0\cos\theta\right)=\sigma$$

$$\Rightarrow \sigma=\frac{-3\varepsilon_0 E_0\cos\theta}{2}$$



Physicsclass.blogsky.com

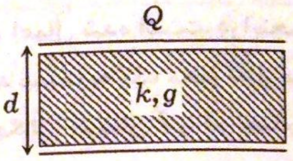
۷-۶ - خازنی با صفحات موازی از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک k و رسانندگی g پر شده است. خازن با بار اولیه Q باردار شده است.

الف) نشان دهید که بار به صورت تابعی نمایی از زمان، از صفحات نشت می‌کند.

ب) نشان دهید که تولید گرمای ژول کل برابر است با انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در آغاز.

ج) اگر ماده سیلیسیم اکسید باشد، ثابت زمانی تخلیه چقدر است؟ (رک. جدول‌های ۴-۱ و ۷-۱)

حل:



الف)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}.\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\\ \vec{J}=g\vec{E}\\ \vec{\nabla}.\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+g\frac{\rho}{\varepsilon}=0$$

$$\Rightarrow\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{g}{\varepsilon}dt$$

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}=\rho_0 e^{-\frac{t}{tc}}\ ,\ tc=\frac{\varepsilon}{g}$$

$$\rho=\frac{q}{Ad}\Rightarrow q=q_0 e^{-\frac{t}{tc}}$$

ب) انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده اولیه برابراست با:

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

و انرژی گرمایی تولید شده برابر است با:

$$I=\frac{dq}{dt}=(\frac{-1}{tc})q_0 e^{-\frac{t}{tc}}=\frac{-g}{\varepsilon}q_0 e^{\frac{-t}{tc}}$$

$$\left.\begin{array}{l}dW=I^2Rdt\\ RC=\dfrac{\varepsilon}{g}\Rightarrow R=\dfrac{\varepsilon}{cg}\end{array}\right\}\Rightarrow dW=(\frac{\varepsilon}{cg})(-\frac{g}{\varepsilon}q_0 e^{-\frac{t}{tc}})^2dt$$

$$W=\int_0^\infty\frac{q_0^2 g}{\varepsilon C}e^{\frac{-2gt}{\varepsilon}}dt=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

ج) از جدولهای (۴-۱) و (۷-۱) برای سیلیسیم اکسید داریم:

$$K=4/3\quad,\quad\eta=1\times10^{13}$$

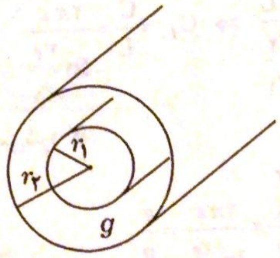
$$tc=\frac{\varepsilon}{g}=\eta\varepsilon=\eta k\varepsilon_0=1\times10^{13}\times4/3\times8/85\times10^{-12}=380/5(s)$$

۷-۷ - دو پوسته استوانه‌ای فلزی طویل (به شعاع‌های r_1، r_2، $r_2>r_1$)، به صورت هم محور قرار داده شده‌اند. پوسته‌ها در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ قرار دارند.

الف) فضای بین پوسته‌ها با محیطی به رسانندگی g پرشده است. با استفاده از قانون اهم، $\vec{J}=g\vec{E}$ جریان الکتریکی میان واحد طول پوسته‌ها را محاسبه کنید.

ب) اگر فضای بین دو پوسته با محیطی نارسانا با گذردهی ε پرشده باشد، می‌توان ظرفیت دستگاه را از تعریف $C=\frac{Q}{\Delta\varphi}$ حساب کرد. صریحاً نشان دهید که برای این وضعیت هندسی حاصل ضرب مقاومت در واحد طول و ظرفیت در واحد طول مساوی $\frac{\varepsilon}{g}$ است.

حل:



الف) به دلیل تقارن استوانه‌ای موجود φ فقط تابعی از r است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\varphi(r)\\ \nabla^2\varphi(r)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(r)=A+B\ln r$$

برای تعیین ضرایب ثابت B, A شرایط مرزی حاکم بر مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1=A+B\ln r_1\\ \varphi_2=A+B\ln r_2\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_1-\varphi_2=B\ln\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow$$

$$B=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}=\frac{\Delta\varphi}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(r)=A-\dfrac{\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln r\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi(r)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{\hat{r}_0}{r}$$

$$\vec{J}=g\vec{E}=\frac{g\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{\hat{r}_0}{r}\Rightarrow I=\int_S\vec{J}.\hat{n}\,da=\frac{g\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(2\pi L)$$

بنابراین جریان الکتریکی میان واحد طول پوسته‌ها برابر است با:

$$I_l=\frac{I}{L}=\frac{2\pi g\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

ب) با استفاده ازقانون اهم، مقاومت درواحد طول برابراست با:

$$\left.\begin{array}{l}R_L I_L=\Delta\varphi\\ I_L=\dfrac{2\pi g\Delta\varphi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\end{array}\right\}\Rightarrow R_L=\frac{\Delta\varphi}{I_L}=\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi g}\qquad(1)$$

Physicsclass.blogsky.com

و ظرفیت در واحد طول برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} Q=\sigma\, 2\pi r_1 L \\ \sigma=\varepsilon E_{r_1} \\ E_{r_1}=\dfrac{\Delta\varphi}{r_1 \ln\dfrac{r_2}{r_1}} \end{array}\right\} \Rightarrow Q=\frac{2\pi\varepsilon\Delta\varphi L}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

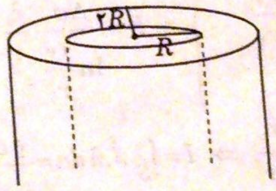
$$C=\frac{Q}{\Delta\varphi}=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \Rightarrow C_L=\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$R_L C_L=\frac{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi g}\times\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}=\frac{\varepsilon}{g}$$

۸-۷ - مقاومت نشت کابلی با پوشش عایق لاستیکی به طریق زیر اندازه‌گیری می‌شود. طول L ازکابل عایق دار را در محلول آب نمک فرو می‌بریم، اختلاف پتانسیلی بین قسمت رسانای کابل و محلول برقرار می‌کنیم و جریانی را که از کابل می‌گذرد اندازه می‌گیریم. در یک مورد خاص ۳ متر از کابل را در محلول فرو برده‌ایم و با اعمال اختلاف پتانسیل ۲۰۰ ولت بین رسانا و محلول جریانی برابر 2×10^{-9} آمپر اندازه‌گیری کرده‌ایم. ضخامت عایق برابر شعاع رسانای درون آن است. مقاومت ویژهٔ الکتریکی عایق چقدر است؟

حل:



$$R=\frac{\Delta\varphi}{I}=\frac{200}{2\times10^{-9}}=10^{11}\,\Omega$$

برای محاسبه مقاومت عایق المانی استوانه‌ای به شعاع r و ضخامت dr را در نظر می‌گیریم:

$$dR=\eta\frac{dr}{2\pi rL} \Rightarrow R=\int_R^{2R} dR=\frac{\eta}{2\pi L}\ln\left(\frac{2R}{R}\right)=\frac{\eta}{2\pi L}\ln 2$$

$$R=\frac{\Delta\varphi}{I} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{I}=\frac{\eta}{2\pi L}\ln 2 \rightarrow \eta=\left(\frac{\Delta\varphi}{I}\right)\frac{2\pi L}{\ln(2)}$$

$$\eta=(10)^{11}\frac{2\pi\times3}{\ln 2}\,(\Omega m)$$

۹-۷ - سیم مسی طویلی به شعاع a در فاصله h از یک صفحه نامتناهی مسی و به موازات آن کشیده شده است. فضای بالای صفحه و اطراف سیم با محیطی به رسانندگی g پرشده است. نشان دهید که مقاومت الکتریکی بین این دو الکترود مسی در واحد طول سیم برابر است با:

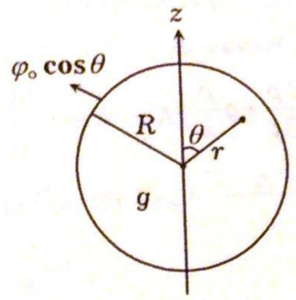
$$R=\frac{1}{2\pi g}\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

حل: از مسئله (۶-۱۴) برای ظرفیت درواحد طول سیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} C=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{h}{a}\right)} \\ CR=\dfrac{\varepsilon}{g} \rightarrow R=\dfrac{\varepsilon}{gc} \end{array}\right\} \Rightarrow R=\frac{\varepsilon}{g}\,\frac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{h}{a}\right)}{2\pi\varepsilon}=\frac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{h}{a}\right)}{2\pi g}$$

۱۰-۷ - به تمام نقاط سطح یک کره همگن و همسانگرد با رسانندگی g، پتانسیل $\varphi_0\cos\theta$ اعمال شده است. دراینجا θ همان زاویه قطبی معمولی است که نسبت به یک محورکه از مرکز کره می‌گذرد اندازه‌گیری می‌شود. چگالی جریان J را در تمام نقاط درون کره محاسبه کنید.

حل:



با توجه به تقارن مسئله، پتانسیل به زاویه سمتی بستگی ندارد، بنابراین:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

با اعمال شرایط مرزی مسئله ضرایب ثابت A_n، B_n ها را بدست می‌آوریم:

وقتی r به سمت صفر میل می‌کند، پتانسیل نباید بی‌نهایت شود، بنابراین:

$$\varphi(r\rightarrow0)\neq\infty \Rightarrow B_n=0\ \forall n$$

$$\varphi(r=R)=\varphi_0\cos\theta \Rightarrow \varphi_0 P_1(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n R^n P_n(\cos\theta)$$

دو طرف‌این رابطه را در $P_m(\cos\theta)$ ضرب کرده و انتگرال گرفته و از رابطه تعامدی زیر برای چند جمله‌ای‌های لژاندر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\,d(\cos\theta)=\frac{2\sigma_{nm}}{2n+1}$$

بنابراین:

$$\varphi_0\sigma_{1m}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n R^n\sigma_{nm}=A_m R^m \Rightarrow A_1=\frac{\varphi_0}{R}$$

$$A_m=0 \qquad m\neq1$$

در نتیجه تابع پتانسیل به صورت زیر حاصل می‌شود:

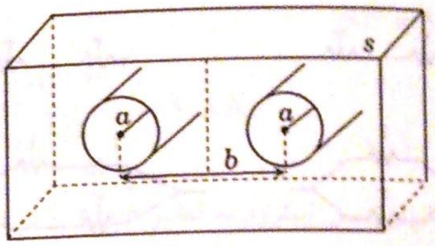
$$\left.\begin{array}{l} \varphi(r,\theta)=\dfrac{\varphi_0}{R}r\cos\theta=\dfrac{\varphi_0}{R}Z \\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{E}=-\dfrac{\varphi_0}{R}\hat{k} \\ \vec{J}=g\vec{E} \end{array}\right.$$

Physicsclass.blogsky.com

$\Rightarrow \vec J=-g\frac{\varphi_0}{R}\hat k$

۷-۱۱ - دو الکترود مسی استوانه‌ای به شعاع a بر صفحه دیسکی از جنس سیلیسیم به ضخامت s عمودند و فاصله محورهای آن دو از یکدیگر b است. الکترودها تا عمق s در دیسک فرو رفته‌اند، به طوری که می‌توان آن را نامتناهی انگاشت. اگر رسانندگی سیلیسیم g باشد، جریان بین الکترودها را هنگامی‌که اختلاف پتانسیل آنها برابر $\Delta\varphi$ است، حساب کنید.

حل:



چون صفحه عمود منصف خط واصل مراکز دو استوانه، یک سطح هم پتانسیل است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که دو تا مقاومت از نوع مسئله (۷-۹) دراین مسئله متوالی شده‌اند، بنابراین:

$$R=\frac{\cosh^{-1}(\frac{h}{a})}{2\pi gL},\quad h=\frac{b}{2},\quad L=s$$

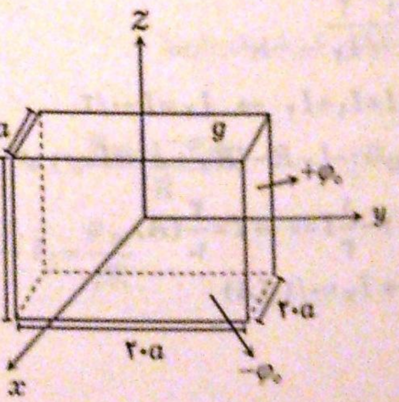
$$\left.\begin{aligned}R_{total}&=2R=\frac{\cosh^{-1}(\frac{b}{2a})}{\pi gs}\\ I&=\frac{\Delta\varphi}{R}\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=\frac{\Delta\varphi\pi gs}{\cosh^{-1}(\frac{b}{2a})}$$

۷-۱۲ - یک صفحه مسی مربع شکل به ضلع $20a$ و ضخامت s و رسانندگی g تحت تاثیر اختلاف پتانسیلی به نحو زیر قرار دارد: دو لبه مقابل هم صفحه به ترتیب در پتانسیلهای $\varphi_0, -\varphi_0$ قرار داده شده‌اند.

(الف) مقاومت الکتریکی صفحه چقدر است؟

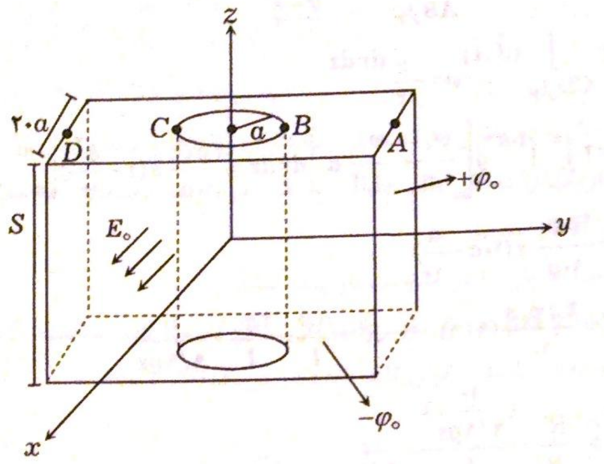
(ب) سوراخ کوچکی به شعاع a در مرکز صفحه ایجاد می‌کنیم نسبت تغییر مقاومت را به طور تقریبی محاسبه کنید. (راهنمایی: توزیع پتانسیل را در صفحه با استفاده از هماهنگهای استوانه‌ای $\cos\theta$ پیدا کنید. متأسفانه توزیعی که در بدین نحو به دست می‌آورید، کاملاً صحیح نیست: زیرا که دو لبه مقابل مربع دقیقاً منطبق بر خطوط هم پتانسیل این توزیع نیستند. پاسخ تقریبی را می‌توان با مساوی گرفتن پتانسیل متوسط دو لبه با $\pm\varphi_0$ به دست آورد.)

حل: الف)



$$R=\eta\frac{L}{A}=\frac{1}{g}\frac{L}{A}\Rightarrow dR=\frac{1}{g}\frac{dy}{20as}\Rightarrow R=\frac{1}{g(20as)}\int_0^{20a}dy=\frac{1}{gs}$$

ب)



$$\vec E_0=\frac{\Delta\varphi}{20a}\hat i=\frac{2\varphi_0}{20a}\hat i=\frac{\varphi_0}{10a}\hat i\qquad \rho=0\Rightarrow\nabla^2\varphi=0$$

$$\Rightarrow\varphi(r,\varphi)=A_0+A_1r\cos\theta+B_1\frac{\cos\theta}{r}\quad r>a$$

با توجه به‌اینکه در $(r\to\infty)$, $\vec E=E_0\hat i$ است، فقط جملات شامل $\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم. برای بدست آوردن ضرایب ثابت، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\varphi(r\to\infty)=-E_0r\cos\theta\to A_0=0,A_1=-E_0=-\frac{\varphi_0}{10a}$$

$$J_{1n}=J_{2n}\to g_1E_{1n}=g_2E_{2n}\xrightarrow[\text{(داخل حفره } g_1)]{g_1=0}E_{2n}=0$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=a}=0$$

$$A_1\cos\theta-B_1\frac{\cos\theta}{r^2}\Big|_{r=a}=0\Rightarrow-\frac{\varphi_0}{10a}\cos\theta-B_1\frac{\cos\theta}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\varphi_0}{10a}+\frac{B_1}{a^2}=0\Rightarrow B_1=\frac{-\varphi_0 a}{10}$$

بنابراین پتانسیل در $r>a$ به صورت زیر است:

$$\varphi(r,\theta)=-\frac{\varphi_0}{10a}r\cos\theta-\frac{\varphi_0a}{10r}\cos\theta\quad r>a$$

$$\vec E=-\vec\nabla\varphi(r,\theta)=-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat\theta\right]$$

$$=-\left[(\frac{-\varphi_0}{10a}\cos\theta+\frac{\varphi_0a}{10r^2}\cos\theta)\hat r+\frac{1}{r}(+\frac{\varphi_0}{10a}r\sin\theta+\frac{\varphi_0a}{10r}\sin\theta)\hat\theta\right]$$

$$\vec J=g\vec E=g\left[(\frac{\varphi_0}{10a}\cos\theta-\frac{\varphi_0}{10r^2}a\cos\theta)\hat r-\frac{1}{r}(\frac{\varphi_0}{10a}r\sin\theta+\frac{\varphi_0a}{10r}\sin\theta)\hat\theta\right]$$

Physicsclass.blogsky.com

با توجه شکل مقدار جریان I را بدست می‌آوریم، I جریانی است که در امتداد محور x از نوارهای AB, CD عبور می کند، بنابراین:

$$I=\int \vec{J}\cdot\hat{i}\,da=\int_{\text{نوار}\,AB}(\vec{J}\cdot\hat{i})_{\varphi=\frac{\pi}{2}}\,dr\,dz+\int_{\text{نوار}\,CD}(\vec{J}\cdot\hat{i})_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}\,dr\,dz$$

$$=2\int_0^s\int_0^{10a} g\left[\frac{\varphi_0}{10a}+\frac{\varphi_0}{10r^2}a\right]dr\,dz=\frac{2g\varphi_0}{10a}s\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\Big|_a^{10a}$$

$$=\frac{2g\varphi_0}{10a}s\left(10a-\frac{a}{10}\right)$$

$$I=\frac{2g\varphi_0 s}{10}(9/9)\Rightarrow R'=\frac{\Delta\varphi}{I}=\frac{2\varphi_0}{I}=\frac{10}{9/9gs}$$

$$\Rightarrow\frac{R'}{R}=\frac{\left(\frac{10}{9/9gs}\right)}{\left(\frac{1}{gs}\right)}=\frac{10}{9/9}$$

۷-۱۳- نسبت اتلاف توان به مساحت سطح را برای رساناهای مذکور در (الف) مسئله ۷-۱ و (ب) مسئله ۷-۲ محاسبه کنید.

حل: الف)

$$R=\eta\frac{L}{A}\quad,\quad P=RI^2\quad,\quad S=2\pi rl$$

$$\Rightarrow\frac{P}{S}=\eta\frac{L}{A}\frac{I^2}{2\pi rl}\quad,\quad A=\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}\Rightarrow 2\pi r=2\sqrt{\pi A}$$

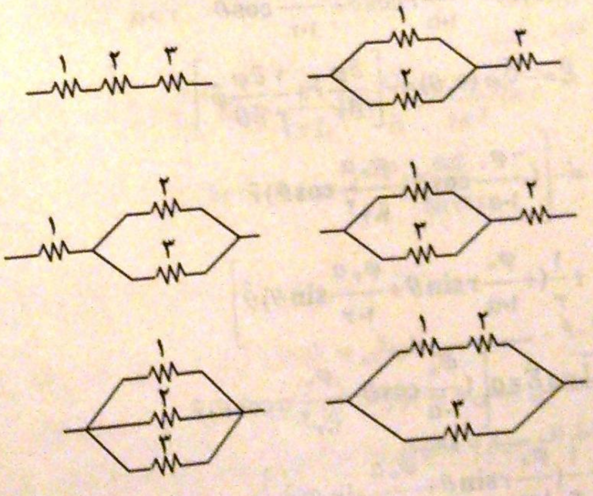
$$\Rightarrow\frac{P}{S}=\eta\frac{I^2}{2A\sqrt{\pi A}}=\frac{(1/67\times10^{-8})(20)^2}{2(2\times10^{-6})\sqrt{\pi(2\times10^{-6})}}=666/23\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

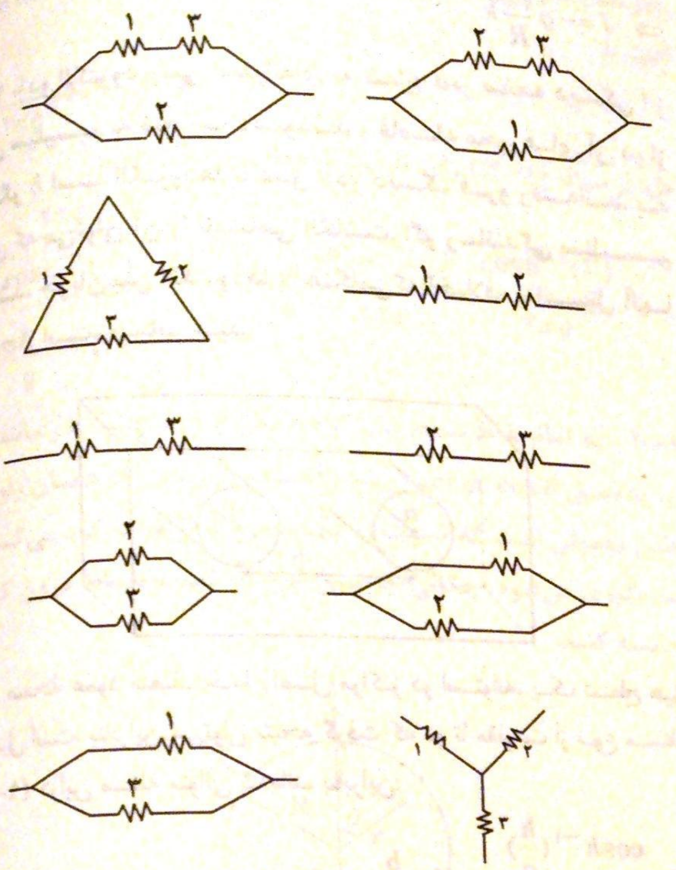
ب)

$$R=\frac{1}{g}\frac{L}{A}\quad,\quad P=\frac{(\Delta\varphi)^2}{R}\quad,\quad S=(2\times10^{-2})\times(1\times10^{-4})=2\times10^{-6}$$

$$\Rightarrow\frac{P}{S}=\frac{(\Delta\varphi)^2 gA}{LS}=\frac{(4)^2(4/3)(1\times10^{-4})}{(2\times10^{-2})(2\times10^{-6})}=4/3\times10^{4}\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

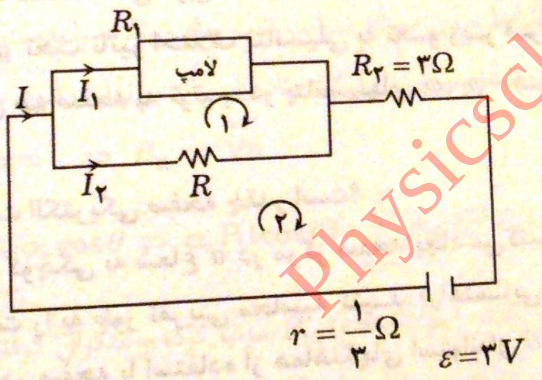
۷-۱۴- سه مقاومت ۱ اهمی و ۲ اهمی و ۳ اهمی داده شده‌اند. مقاومت شانزده ترکیب مختلف را که با این مقاومتها می‌توان ساخت پیدا کنید.





۷-۱۵- یک لامپ ۰/۴ واتی چنان طراحی شده است که با اختلاف پتانسیل ۲ ولتی کار کند. مقاومت R را به طور موازی با لامپ می‌بندیم و ترکیب این دو را با یک مقاومت ۳ اهمی و یک باطری ۳ ولتی (با مقاومت داخلی ۱/۳ اهم) به طور متوالی قرار می‌دهیم. مقدار R باید چقدر باشد تا لامپ در ولتاژ طرح کار کند؟

حل:



$$P=\frac{V^2}{R_1}\Rightarrow R_1=\frac{V^2}{P}=\frac{(2)^2}{0/4}=10\Omega\to I_1=\frac{V}{R_1}=\frac{2}{10}=0/2(A)$$

قانون حلقه کیرشهوف (۱): $-I_1R_1+I_2R=0\to$ (۱)

$$R=\frac{I_1R_1}{I_2}=\frac{2}{I_2}\qquad(2)$$

قانون گره: $I=I_1+I_2\to I_2=I-0/2$

قانون حلقه (۲): $-I_2R-IR_2+\varepsilon-rI=0\to$ (۳)

$$-2-3I+3-\frac{1}{3}I=0\to I=\frac{3}{10}(A)$$

(۲),(۳) $\to I_2=0/1\ (A)$

Physicsclass.blogsky.com

$(1),(2) \to R=20\ \Omega$

۷-۱۶- در مسئله (۷-۱۱)، شعاع الکترودها $0/5mm$، فاصله محوری الکترودها $b=1/5mm$ ، $s=3mm$ ، η (مقاومت ویژه si) برابر با $0/1\Omega m$ است. اگر باتری ۱۰۰ ولتی بین دو الکترود وصل شود، جریانی را که از دیسک عبور می‌کند، به دست آورید.

حل: از مسئله (۷-۱۱) داریم:

$$I=\frac{\Delta\varphi}{R}=\frac{\Delta\varphi\,\pi g s}{\cosh^{-1}(\frac{b}{2a})}$$

با جایگذاری مقادیر داریم:

$$I=\frac{(100)\pi(\frac{1}{0/1})(3\times10^{-3})}{\cosh^{-1}(\frac{1/5}{2(0/5)})}\approx 9/8A$$

۷-۱۷- سیمی از جنس نیکروم به قطر $0/2mm$ در دست است. هنگامی که ولتاژی معادل $120V$ به دو سر این سیم اعمال شود، $600W$ انرژی در آن تلف می‌شود. طول سیم را تعیین کنید.

حل:

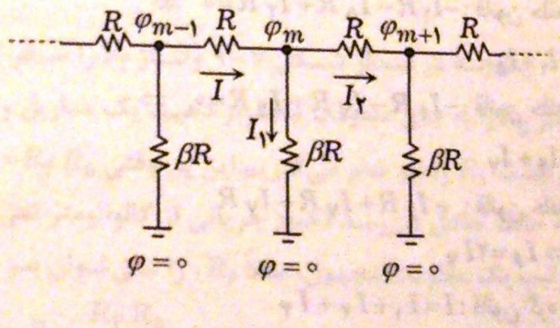
$$P=\frac{V^2}{R} \Rightarrow R=\frac{V^2}{P}=\frac{(120)^2}{600}=24\Omega$$

$$R=\eta\frac{L}{A}\Rightarrow L=\frac{RA}{\eta}=\frac{24\times(\frac{0/2}{2}\times10^{-3})^2\pi}{100\times10^{-8}}\approx 0/754\ (m)$$

۷-۱۸- یک خط مقاومت با مقاومت کل nR بین پتانسیل φ_0 و زمین وصل شده است (منظور از زمین پتانسیل مرجع است). خط مقاومت روی $n-1$ تیر با فواصل یکسان قرار گرفته است، به طوری که مقاومت بین هر دو تیر R است مقاومت نشت شده به زمین در هر یک از تیرها βR است. اگر φ_m پتانسیل خط مقاومت در m امین تیر باشد، نشان دهید که:

$$\varphi_{m+1}-(2+\beta^{-1})\varphi_m+\varphi_{m-1}=0$$

حل:



با استفاده از قوانین کیر شهوف داریم:

$I=I_1+I_2$ (1)

$$\varphi_{m-1}-RI=\varphi_m \to I=\frac{\varphi_{m-1}-\varphi_m}{R}$$

$$0+\beta RI_1=\varphi_m \to I_1=\frac{\varphi_m}{\beta R}$$

$$\varphi_m-RI_2=\varphi_{m+1}\to I_2=\frac{\varphi_m-\varphi_{m+1}}{R}$$

با جایگذاری جریان‌های بدست آمده در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{\varphi_{m-1}-\varphi_m}{R}=\frac{\varphi_m}{\beta R}+\frac{\varphi_m-\varphi_{m+1}}{R}\Rightarrow$$

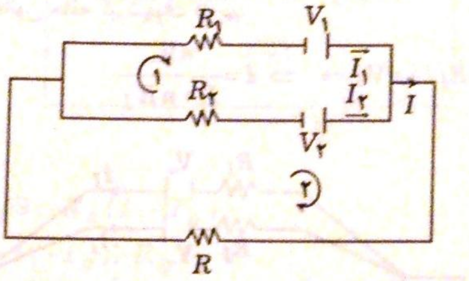
$$\varphi_{m+1}-(2+\beta^{-1})\varphi_m+\varphi_{m-1}=0$$

۷-۱۹- دو باتری را که به ترتیب دارای ولتاژهای مدار باز V_1, V_2 و مقاومتهای داخلی R_1, R_2 اند، به طور موازی به یکدیگر و به مقاومت بار R می‌بندیم.

(الف) جریان را در مقاومت بار پیدا کنید.

(ب) اگر مقاومت بار تغییر کند ولی سایر کمیتها ثابت بمانند R باید چه مقدار باشد تا توان تلف شده در آن حداکثر شود؟

حل:



الف)

(1) $I_1+I_2=I$: (قانون گره)

(2) $-R_1I_1+V_1-V_2+R_2I_2=0$: (قانون حلقه (۱))

(3) $-RI-R_2I_2+V_2=0 \to I_2=\frac{V_2-RI}{R_2}$: (قانون حلقه (۲))

$$(1),(3)\to I_1=I-I_2=I-\frac{V_2-RI}{R_2}$$

با جایگذاری جریانهای I_1, I_2 در رابطه (۲) داریم:

$$-R_1(I-\frac{V_2-RI}{R_2})+V_1-V_2+R_2(\frac{V_2-RI}{R_2})=0$$

$$-R_1I+\frac{V_2R_1-R_1RI}{R_2}+V_1-V_2+V_2-RI=0$$

$$-R_2R_1I+V_2R_1-R_1RI+V_1R_2-R_2RI=0\to$$

$$I=\frac{V_1R_2+V_2R_1}{RR_1+RR_2+R_1R_2}$$

ب)

$$P=I^2R=\left[\frac{V_1R_2+V_2R_1}{RR_1+RR_2+R_1R_2}\right]^2R$$

$$\frac{dP}{dR}=0\Rightarrow -\frac{2(V_1R_2+V_2R_1)^2(R_1+R_2)}{[RR_1+RR_2+R_1R_2]^3}R$$

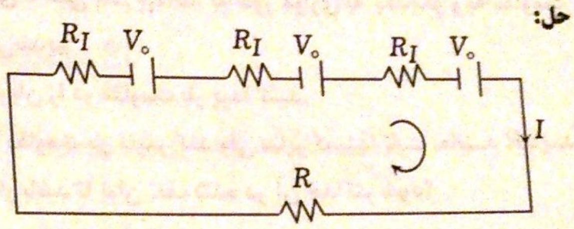
$$+\left[\frac{V_1R_2+V_2R_1}{RR_1+RR_2+R_1R_2}\right]^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{2(R_1+R_2)}{[RR_1+RR_2+R_1R_2]}R=1\Rightarrow R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Physicsclass.blogsky.com

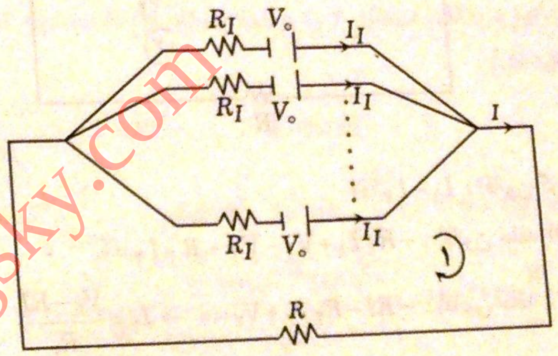
۷-۲۰- یک گروه پیل n تایی مشابه با ولتاژ مدار باز V_0 و مقاومت داخلی R_I را برای ایجاد جریان در مقاومت بار R به کار می‌بریم، نشان دهید که اگر این n پیل را به یکدیگر و با مقاومت R به طور متوالی ببندیم، آنگاه $I=\frac{nV_0}{(R+nR_I)}$ ولی هرگاه پیلها را موازی ببندیم و ترکیب آنها را به طور متوالی به مقاومت R وصل کنیم، آنگاه $I=\frac{V_0}{(R+\frac{R_I}{n})}$:

حل:



با استفاده از قانون حلقه کیرشهوف داریم:

$$-RI-nR_II+nV_0=0 \Rightarrow I=\frac{nV_0}{R+nR_I}$$



(قانون گره) : $nI_I=I$

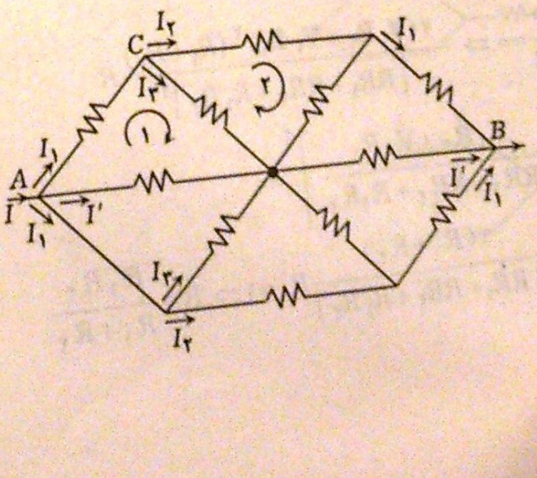
قانون حلقه (۱) : $-IR-I_IR_I+V_0=0$ } $\Rightarrow -IR-\frac{I}{n}R_I+V_0=0 \Rightarrow I=\frac{V_0}{R+\frac{R_I}{n}}$

۷-۲۱- شش مقاومت مشابه (R) را به هم می‌بندیم تا تشکیل یک شش ضلعی بدهند. شش مقاومت دیگر (همگی با همان مقاومت R) را بین شش راس این شش ضلعی و مرکز آن وصل می‌کنیم.

(الف) مقاومت معادل بین هر دو راس مقابل چقدر است؟

(ب) مقاومت معادل بین هر دو راس مجاور چقدر است؟

حل: الف) با توجه به تقارن موجود، مقدار جریان در هر مقاومت را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:



با توجه به قوانین کیر شهوف داریم:

$$R_{AB}=\frac{V_{AB}}{I}=\frac{2RI'}{I}$$

برای بدست آوردن I' به صورت زیر عمل می‌کنیم:

قانون حلقه (۱): $-I_1R-I_3R+RI'=0 \Rightarrow$

$I'=I_1+I_3$ (۱)

قانون گره (C): $I_1=I_2+I_3$ (۲)

قانون حلقه (۲): $-I_2R+I_3R+I_3R=0 \Rightarrow$

$I_2=2I_3$ (۳)

قانون گره (A): $I=2I_1+I'$ (۴)

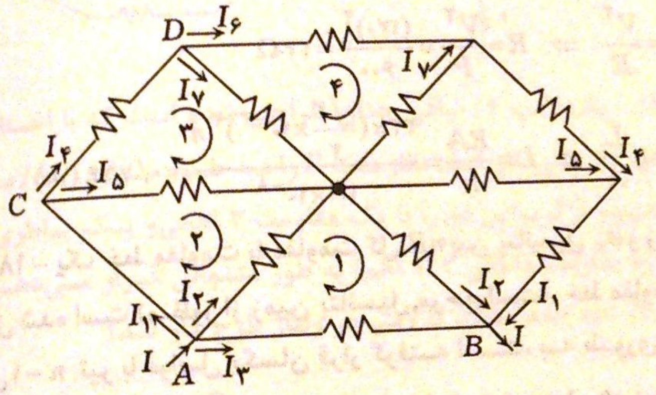
$(2),(3) \Rightarrow I_1=3I_3 \xrightarrow{(1)} I'=4I_3 \xrightarrow{(4)}$

$I=10I_3 \Rightarrow I_3=\frac{I}{10}$

$\Rightarrow I_1=\frac{3}{10}I \xrightarrow{(1)} I'=\frac{3}{10}I+\frac{I}{10}=\frac{4I}{10}$

$R_{AB}=\frac{2R}{I}I'=\frac{2R}{I}\frac{4}{10}I=\frac{4}{5}R$

ب)



$$R_{AB}=\frac{V_{AB}}{I}=\frac{I_3R}{I}$$

برای بدست آوردن I_3 برحسب I به صورت زیر عمل می‌کنیم:

قانون حلقه (۱): $-I_2R-I_2R+I_3R=0 \Rightarrow$ (۱)

$I_3=2I_2$

قانون حلقه (۲): $-I_1R-I_5R+I_2R=0 \Rightarrow$ (۲)

$I_2=I_1+I_5$

قانون حلقه (۳): $-I_4R-I_7R+I_5R=0 \Rightarrow$ (۳)

$I_5=I_4+I_7$

قانون حلقه (۴): $-I_6R+I_7R+I_7R$ (۴)

$=0 \Rightarrow I_6=2I_7$ (۵)

قانون گره (A): $I=I_1+I_2+I_3$ (۶)

قانون گره (C): $I_1=I_4+I_5$ (۷)

قانون گره (D): $I_4=I_6+I_7$

$(4),(7) \Rightarrow I_4=3I_7 \xrightarrow{(3)} I_5=4I_7 \xrightarrow{(6)}$

$I_1=7I_7 \xrightarrow{(2)} I_2=11I_7 \xrightarrow{(1)} I_3=22I_7$

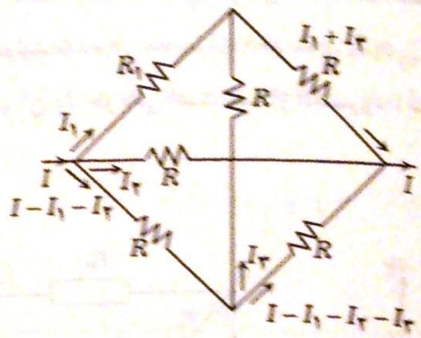
$\xrightarrow{(5)} I=(7+11+22)I_7 \Rightarrow I_7=\frac{I}{40} \Rightarrow$

Physicsclass.blogsky.com

$-I_3=\frac{22}{40}I \Rightarrow R_{AB}=\frac{22}{40}\frac{I}{I}R=\frac{22}{40}R=\frac{11}{20}R$

۷-۲۲- شش مقاومت بالهای یک چهار وجهی را تشکیل می‌دهند. پنج تا از مقاومتهای یکسان‌اند (R) و ششمی برابر R_1 است. اختلاف پتانسیلی به دو سر یکی از مقاومتهای مجاور R_1 اعمال می‌کنیم. نشان دهید که تولید گرمای ژول در R_1 هنگامی حداکثر است که $R_1=(\frac{5}{3})R$ باشد.

حل:



$-R_1I_1+RI_2+R(I-I_1-I_2)=0 \Rightarrow$

$-(R_1+R)I_1+R(I_2+I-I_2)=0$ (۱)

$-R_1I_1-R(I_1+I_3)+I_2R=0 \Rightarrow$

$-(R_1+R)I_1+R(I_2-I_3)=0$ (۲)

$-RI_2+R(I-I_1-I_2-I_3)+R(I-I_1-I_2)=0 \Rightarrow$

$-3I_2+2I-2I_1=0$ (۳)

$-R(I_1+I_3)+R(I-I_1-I_2-I_3)-RI_3=0 \Rightarrow$

$-3I_3-2I_1+I-I_2=0$ (۴)

$(3)\Rightarrow \frac{2(I-I_1)}{3}=I_2 \xrightarrow{(4)} I_3$

$=\frac{I-4I_1}{9} \xrightarrow{(1)} I_1=\frac{4RI}{7R+R_1}$

$P_1=I_1^2R_1=\left[\frac{4RI}{7R+R_1}\right]^2R_1$

$\frac{dP_1}{dR_1}=0 \Rightarrow R_1=\frac{5}{3}R$

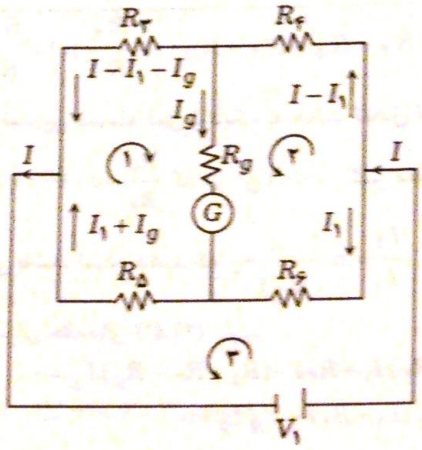
۷-۲۳- چنانچه در مدار شکل ۷-۹ ولتاژ V_2 را صفر کنیم و گالوانومتر R_g را به جای مقاومت R_2 قرار دهیم، یک مدار پل و تستون خواهیم داشت. R_1 را نیز صفر می‌گیریم. این پل وقتی $R_3R_6=R_4R_5$ باشد، به حالت تعادل می‌رسد (هیچ جریانی از گالوانومتر نمی‌گذرد) بدین ترتیب یک مقاومت مجهول، مثلاً R_6، را می‌توان بر حسب مقاومتهای معلوم تعیین کرد: در حالت تعادل $R_6=\frac{R_4R_5}{R_3}$.

الف) جریان الکتریکی را که در حالت عدم تعادل از گالوانومتر می‌گذرد، حساب کنید.

ب) فرض کنید می‌خواهیم با تغییر دادن R_4 پل را به حالت تعادل درآوریم. حساسیت پل با رابطه $S=CR_4(\frac{\partial I_g}{\partial I_4})_0$ تعریف می‌شود، که در آن C مقدار انحراف گالوانومتر به ازای عبور واحد جریان است و شاخص صفر به معنی آن است که مشتق باید در حالت تعادل محاسبه شود. ثابت کنید که:

$$S=\frac{CV_1}{R_3+R_4+R_5+R_6+R_g(1+R_5/R_6)(1+R_4/R_3)}$$

حل:



الف)

قانون حلقه (۱): $-R_5(I_1+I_g)$

$+R_3(I-I_1-I_g)-R_gI_g=0$

$\Rightarrow -(R_5+R_3)I_1-(R_5+R_3+R_g)I_g$

$+R_3I=0$ (۱)

قانون حلقه (۲): $-R_4(I-I_1)-R_gI_g+R_6I_1=0$

$\Rightarrow (R_4+R_6)I_1-R_4I-R_gI_g=0$

قانون حلقه (۳): $V_1-R_6I_1-R_5(I_1+I_g)=0$

$\Rightarrow V_1-(R_6+R_5)I_1-R_5I_g=0$ (۲)

با حل این دستگاه معادلات، I_g برابر می‌شود با:

$$I_g=\frac{(R_3R_6-R_4R_5)V_1}{R_3R_4R_5+R_4R_5R_6+R_5R_6R_3+R_g(R_3+R_4)(R_5+R_6)}$$

ب) برای سادگی در مشتق‌گیری از I_g، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I_g=\frac{AV_1}{B}$$

$$\left[\frac{\partial I_g}{\partial R_4}\right]_0=V_1\left[\frac{(\frac{\partial A}{\partial R_4})B-(\frac{\partial B}{\partial R_4})A}{B^2}\right]$$

$,\frac{\partial A}{\partial R_4}=-R_5\ ,\ A_0=0$

A,A_0 درحالت تعادل $R_3R_6=R_4R_5$، صفر است، بنابراین:

$$\left[\frac{\partial I_g}{\partial R_4}\right]_0=V_1\left[\frac{-R_5B}{B^2}\right]_0=\frac{-V_1R_5}{B_0}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$S=CR_4\left[\frac{\partial I_g}{\partial R_4}\right]_0=\frac{-CV_1R_5R_4}{B_0}$$

$$=\frac{-CV_1R_4R_5}{R_4R_5\left[R_3+R_6+R_5+R_4+R_g\left[1+\frac{R_4}{R_3}\right]\left[1+\frac{R_5}{R_6}\right]\right]}$$

$$S=\frac{-CV_1}{R_3+R_4+R_5+R_6+R_g(1+\frac{R_4}{R_3})(1+\frac{R_5}{R_6})}$$

۷-۲۴ - پل و تستون مسئله قبل نزدیک به حالت تعادل است. فرض کنید $\frac{R_5}{R_3}=\alpha$ ، $\frac{R_6}{R_4}=\alpha(1-\varepsilon)$ که در آن $\varepsilon<<1$ ، اگر مقاومت R_g قابل چشمپوشی باشد، نشان دهید که $\frac{I_2}{I_1}=\alpha\frac{\varepsilon}{(\alpha+1)^2}$ ،

حل: قانون حلقه برای حلقه‌های (۱)،(۲) داریم:

$$-(R_5+R_3)I_1+R_3I-(R_5+R_3+R_g)I_g=0$$

$$(R_4+R_6)I_1-R_4I-R_gI_g=0$$

با حذف I_1 در دستگاه معادلات بالا، داریم:

$$\left[(R_4+R_6)R_3-(R_3+R_5)R_4\right]I$$

$$=\left[(R_4+R_6)(R_3+R_g+R_5)+R_g(R_3+R_5)\right]I_g$$

$$\Rightarrow\frac{I_g}{I}=\frac{(R_4+R_6)R_3-(R_3+R_5)R_4}{\left[(R_4+R_6)(R_3+R_g+R_5)+R_g(R_3+R_5)\right]}$$

با در نظرگرفتن مفروضات مسئله:

$$\frac{R_5}{R_3}=\alpha\quad,\ \frac{R_6}{R_4}=\alpha(1-\varepsilon)\quad,\ \varepsilon<<1\quad,\ R_g\approx 0$$

$$\frac{I_g}{I}=\frac{R_3R_4\left[1+\alpha(1-\varepsilon)-(1+\alpha)\right]}{R_3R_4\left[1+\alpha(1-\varepsilon)\right](1+\alpha)}$$

$$=\frac{-\alpha\varepsilon}{\left[1+\alpha(1-\varepsilon)\right](1+\alpha)}\xrightarrow{\varepsilon<<1}\frac{-\alpha\varepsilon}{(1+\alpha)^2}$$

۷-۲۵ - یک مقاومت تقریباً ۱۰اهمی‌را می‌خواهیم با مدار پل وتستون مسئلهٔ (۷-۲۳) اندازه بگیریم. تعداد بسیار متنوعی مقاومت معلوم استاندارد در دست داریم. حداکثر توان مجاز دستگاه ۵ وات است. اگر $R_g=100\Omega$ باشد، و گالوانیزه جریانهایی را که درست $4\times10^{-9}A$ یا بیشترند نشان بدهد، بالاترین دقتی که می‌توان در اندازه‌گیری یک مقاومت مجهول به دست آورد چقدر است؟ فرض کنید مقاومتهای استاندارد کاملاً دقیق باشند و محدودیتی در دقت‌ایجاد نکنند.

حل:

$$P_{max}=\frac{V_1^2}{R}=5\,watt$$

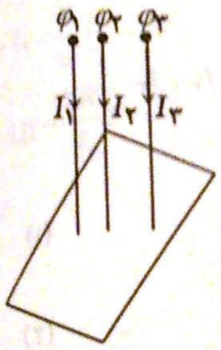
$$\frac{R_4\|R_6}{R_6}-\frac{\frac{R_5\|R_3}{R}}{R_5}=4n\,A$$

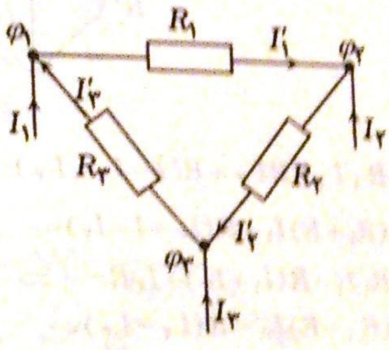
هرچه ولتاژ اعمالی به مدار بیشترباشد جریان شاخه‌ها هم بیشتر می‌شود پس گالوانومترخطادارد پس باید جریان‌این شاخه زیاد باشد درصورتی‌که بیش‌ترین ولتاژ به مداراعمال شود ولی کم‌ترین جریان موردنیاز به‌این شاخه برسد بدترین شرایط را داریم:

$$\Delta R_5=R_5-\frac{R_6R_3}{R_4}$$

۷-۲۶ یک محیط رسانای خطی در n نقطه به الکترودهایی با پتانسیل‌های ثابت: $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ وصل شده‌است. نشان دهید که گرمای ژول تولید شده در محیط از جمع‌بندی $\sum_{i=1}^{n}\varphi_iI_i$ به دست می‌آید، که در آن I_i جریانی است که از الکترود i به محیط وارد می‌شود.

حل:





اگر تعداد الکترودها سه‌تا باشد و R_1 ، R_2 ، R_3 مقاومت معادل باشندداریم:

$$\begin{cases}R_1=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{I'_1}\\ I_1=I'_1-I'_3\end{cases}\qquad\begin{cases}R_2=\frac{\varphi_2-\varphi_3}{I'_2}\\ I_2=I'_2-I'_1\end{cases}\qquad\begin{cases}R_3=\frac{\varphi_3-\varphi_1}{I'_3}\\ I_3=I'_3-I'_2\end{cases}$$

$$W=\sum R_iI_i'^2$$

$$\xrightarrow{(1)}W=(\varphi_1-\varphi_2)I'_1+(\varphi_2-\varphi_3)I'_2+(\varphi_3-\varphi_1)I'_3$$

$$W=\varphi_1(I'_1-I'_3)+\varphi_2(I'_2-I'_1)+\varphi_3(I'_3-I'_2)$$

$$W=\varphi_1I_1+\varphi_2I_2+\varphi_3I_3=\sum_{i=1}^{3}\varphi_iI_i$$

حالا برای n تا الکترود با پتانسیل‌های ثابت $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\dots\varphi_n$ گرمای ژول‌ایجاد شده را تعمیم می‌دهیم.

$$\begin{cases}r=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}\\ r'=x'\hat{i}\\ dl'=dx'\hat{i}\end{cases}$$

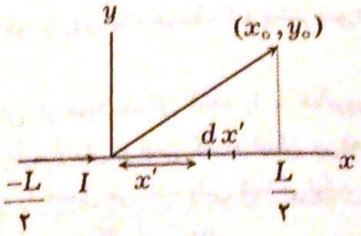
$$B(r)=\frac{\mu_0I}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{dx'\hat{i}\times\left[(x_0-x')\hat{i}+y_0\hat{j}\right]}{\left[(x_0-x')^2+y_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{k}y_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{dx'}{\left[(x_0-x')^2+y_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}\qquad \int\frac{dz}{(z^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{t^2\sqrt{z^2+t^2}}$$

$$\rightarrow B=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{y_0}\left[\frac{-x_0+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x_0-\frac{a}{2})^2+y_0^2}}+\frac{x_0+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x_0-\frac{a}{2})^2+y_0^2}}\right]$$

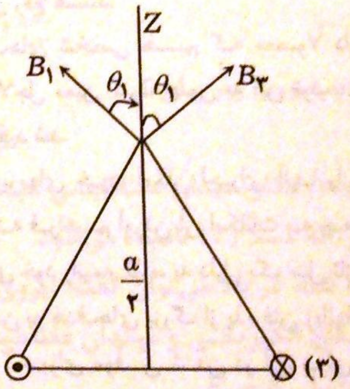
قانون بیوساوارمیدان ناشی ازیک قطعه سیم به طول a درنتیجه باید میدان ناشی از هر قطعه سیم را درنقطه مورد نظر حساب کرده و آن‌ها راباهم جمع‌برداری کنیم



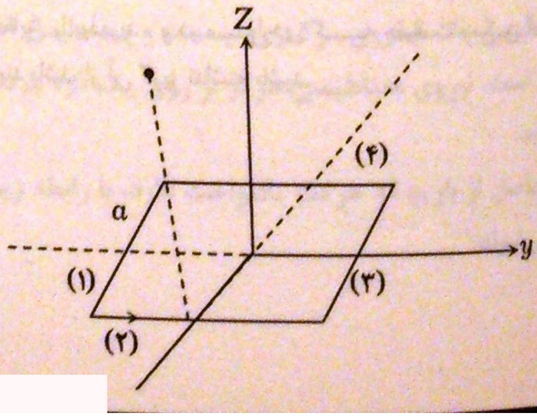
مرکز مربع
$$\begin{cases}x_{01}=x_{02}=x_{03}=x_{04}=0\\ y_{01}=y_{02}=y_{03}=y_{04}=\frac{a}{2}\end{cases}$$

$$B_1=B_2=B_3=B_4=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a}\left[2\frac{2(\frac{a}{2})}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{\pi a}(\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{K}$$

$$B=B_1+B_2+B_3+B_4=4(\frac{\mu_0 I}{\pi a}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{K})=2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\hat{K}$$



$$\begin{cases}y_{01}=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ x_{01}=\frac{a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}y_{02}=\frac{a}{2}\\ x_{02}=0\end{cases}\quad\begin{cases}y_{03}=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ x_{03}=\frac{-a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}y_{04}=\frac{\sqrt{5}}{2}a\\ x_{04}=0\end{cases}$$



$$|B_1|=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{a}\left[0+\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\frac{2}{\sqrt{3}})$$

$$|B_2|=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a}\left[2\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(2\sqrt{2})$$

$$|B_3|=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\frac{2}{\sqrt{3}})$$

$$|B_4|=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a\sqrt{5}}\left[\frac{2(\frac{a}{2})}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{5}{4}a^2}}\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}})$$

از قانون دست راست داریم:

$$B_z=B_1\cos\theta_1+B_3\cos\theta_1+B_4\cos\theta_4$$

$$\cos\theta_1=\frac{\frac{a}{2}}{y_{01}}=\frac{\frac{a}{2}}{y_{03}}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta_4=\frac{a}{y_{04}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[2(\frac{2}{\sqrt{3}})(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}})(\frac{2}{\sqrt{5}})\right]=0/572\frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

$$B_x=B_2-B_4\,Sin\theta_4=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a})=0/625\frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

چون تقارن داریم $B_y=0$

$$\begin{cases}x_{01}=a\\ y_{01}=\frac{a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_{02}=0\\ y_{02}=\frac{a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_{03}=-a\\ y_{03}=\frac{a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_{04}=0\\ y_{04}=\frac{3}{2}a\end{cases}$$

$$B_1=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a}\left[\frac{-\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}+\frac{\frac{3}{2}a}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}\right]=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-\sqrt{2}+\frac{6}{\sqrt{10}}\right]$$

$$B_2=-\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a}\left[2\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}\right]=-\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(2\sqrt{2})$$

$$B_3=\hat{K}\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a}\left[\frac{\frac{3}{2}a}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}+\frac{-\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}\right]=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{6}{\sqrt{10}}-\sqrt{2}\right]$$

$$B_4=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{3a}\left[2\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}}\right]=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\frac{4}{3\sqrt{10}})$$

Physicsclass.blogsky.com

$$B=\sum_{1}^{4} B\hat{K}=B_1+B_2+B_3+B_4$$

$$=\hat{K}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[(-\sqrt{2}+\frac{6}{\sqrt{10}})-(2\sqrt{2})+(\frac{6}{\sqrt{10}}-\sqrt{2})+(\frac{4}{2\sqrt{10}})\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(-4\sqrt{2}+\frac{40}{3\sqrt{10}})=0.36\frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

راه رسیدن به خواسته‌ها:

۱- خود را عادت دهید که از موکول کردن کارها به فردا بپرهیزید و به دلایلی مانند اینکه فلان کار وقت گیر است، از انجام آن سرباز نزنید. این کار را می‌توانید حتّی از انجام کارهایی نظیر تعمیرات وسایل خانه و نوشتن نامه به دوستان، که همیشه منتظر یافتن وقت مساعد برای انجامش هستید، شروع کنید.

۲- فکرتان را روی موضوع اصلی که در واقع محور علاقه‌ی اصلی شما است، متمرکز کنید.

۳- با این احتمال که کار، در همین یک امروز به اتمام نخواهد رسید، آن را به فردا نیندازید.

۴- پیگیری در کارها را به عنوان یک عادت پسندیده در خود پرورش دهید.

۵- کاری را که مورد علاقه‌تان قرار گرفته و با ارزش و مفید است، طوری شروع کنید که امکان بازگشت از نیمه راه برایتان وجود نداشته باشد.

۶- به خودتان تلقین کنید که: هدف هر قدر هم که مهم و رسیدن به آن دشوار باشد، برای شما غیر قابل دست یافتن نیست.

۷- هرگز نگویید نمی‌توانم. شما که امتحان نکرده‌اید که می‌توانید یا نه، پس چطور از نتوانستن حرف می‌زنید؟

۸- از انجام کارها ترس به خود راه ندهید، و از بیم شکست، دست روی دست نگذارید، چون تازه در صورت شکست همان وضعی را خواهید داشت که امروز، یعنی قبل از شروع کار دارید، پس در آن صورت هم چیزی را از دست نخواهید داد.

۹- اعتماد به نفس خود را از دست ندهید. قبول شکست همیشه با اندیشه‌ی شکست شروع می‌شود.

۱۰ – اطّلاعات لازم را در مورد کارهای مورد علاقه خود به دست آورید با این اطّلاعات اعتماد به نفس شما افزایش می‌یابد، چون راحت‌تر می‌توانید توانایی‌های خود را با مسائل مورد نیاز کار بسنجید.

۱۱- به خودتان ایمان داشته باشید. هرگز فکر نکنید از دیگران کمتر هستید.

۱۲- در برابر اظهارنظر دیگران اعتماد و اعتقاد خود را از دست ندهید. فرضاً اگر نظریه‌ی جدیدی را با دوستان خود در میان می‌گذارید، به طور معمول، آنها، برای جلوگیری از وارد شدن زیان به شما، اول مشکلات عملی کردن آن نظریه را مطرح می‌کنند، که همین مطرح شدن مشکلات، منجر به دلسرد کردن شما می‌شود. امّا هرگز در مقابل چنین مسائلی عقب ننشینید. البته با دقّت و توجّه کامل، جوانب کار را در نظر بگیرید، ولی اصل موضوع را رها نکنید.

۱۳- از مشورت با افرادی که به صداقت و دوستی آنها ایمان دارید کوتاهی نکنید. چون برای یک نفر مقدور نیست که همه چیز را شخصا تجربه کند. از مشورت با دیگران، به طور غیر مستقیم، یعنی استفاده از تجربیات آنها.

۱۴- خودتان را عادت بدهید که دقایقی از وقتتان را در شبانه روز به فکر کردن و سنجش اعمال گذشته و برنامه‌های آینده‌تان اختصاص بدهید.

۱۵- وقتی افکار ناخوشایند و منفی و آزار دهنده به مغزتان هجوم می‌آورد، با مطالعه و یا پرداختن به کارهای مفرّح و ورزش، از چنگ آن فکرها خلاص شوید. در این گونه موارد حتی فکر کردن به موفقیّت‌هایی که تا امروز در زندگی داشته‌اید،می‌تواند مفید باشد.

۱۶- در هیچ مرحله‌یی از کار، از تجزیه و تحلیل موقعیّت و وضعیت کار غافل نشوید.

۱۷- نیروهای خود را روی یک هدف که بیشتر مورد علاقه‌تان است متمرکز کنید.

۱۸- فکر کردن در مورد مسائل آینده را با خیالپروری توام نکنید. اگر چه خیالپروری به علّت آرامش و لذّتی که به انسان می‌دهد در بسیاری از موارد ناخواسته خود را تحمیل می‌کند ، ولی شما می‌توانید با برخورداری از واقع‌بینی و حقیقت‌نگری، اسیر چنگال آن نشوید.

۱۹- سعی کنید اهدافی را که برای خود انتخاب می‌کنید، به صورت یادداشت روی کاغذ آورید و در مواقع مقتضی، نزد خود برای رسیدن به آنها برنامه‌ریزی کنید.

۲۰- از مواردی که به طور نسبی یا کامل در آنها موفقیت به دست آورده‌اید برای فهمیدن میزان کارآیی خود در امور ، با اطّلاع شوید.

۲۱- برای رسیدن به اهدافتان جدول زمان‌بندی شده درست کنید و سعی داشته باشید از جدول عقب نمانید، اگر چه برایتان دشوار باشد. چون بعد از مدّتی تحمّل زحمت در این راه، حتماً از جدول جلو خواهید افتاد.

۲۲- مراقب باشید که موانع کوچک دلسردتان نکند. مهم این است که اشتباه نکنید، موانع قابل رفع هستند.

۲۳- برای هدف‌های شخصی هم که معمولاً دارای ضرب‌الاجل نیستند خودتان ضرب‌الاجل معین کنید، چون به این ترتیب، به ایجاد عادت نظم در خود موفق خواهید شد.

۲۴- در برنامه‌ریزیهای خود، امکان اجرای آنها را هم در نظر بگیرید و مشخّص کنید که فراهم آوردن آن امکانات به چه صورت ممکن است.

۲۵- خواست‌های خود رانیمه کاره، به دلیل یک میل تازه،رها نکنید.

۲۶- برای رسیدن به هدف‌های بزرگ از پذیرفتن زیانهای کوچک نترسید.

۲۷- در هدفی که برای موفق شدن در آن، برای خود انتخاب کرده‌اید، از نظرات کسانی که قبل از شما در آن راهها موفق شده‌اند، برخوردار شوید.

۲۸- توجّه زیادی به تقسیم وقت خود داشته باشید. مسأله ساعات کار، ساعات خواب ، ساعات رفت و آمد را به دقت تعیین و تقسیم بندی کنید. سعی کنید در شبانه روز ساعتی را هم به عنوان ساعت فراغت و فکر کردن به وضعیت خود اختصاص دهید.

۲۹- حقایق را بپذیرید ، و در مواردی که حقیقت ممکن است برایتان ناخوشایند باشد، از آن گریز نداشته باشید.

Physicsclass.blogsky.com

۸

میدان مغناطیسی جریان‌های پایا

تعریف میدان مغناطیسی

اگر بار q_1 در مبدأ و بار q در فاصله r از مبداء به ترتیب با سرعتهای ثابت V, V_1 در حرکت باشند، علاوه بر نیروی کولنی یک نیروی مغناطیسی F_m نیز از طرف q_1 به q وارد می‌شود:

$$\vec{F}_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (۱-۸)$$

$$\vec{F}_m=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq_1}{r^2}\vec{V}\times(\vec{V}_1\times\frac{\vec{r}}{r}) \qquad (۲-۸)$$

در دستگاه یکاهای mks، بنا به تعریف، داریم:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\frac{N.S^2}{C^2} \qquad (۳-۸)$$

با در نظرگرفتن میدان $\vec{B}$ حاصل از بار q_1 در فاصله r به صورت زیر:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\vec{V}_1\times\frac{\vec{r}}{r} \qquad (۴-۸)$$

می‌توان نیروی $\vec{F}_m$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{F}_m=q\vec{V}\times\vec{B}$$

بنابراین در دستگاه mks، یکای میدان مغناطیسی عبارت است از نیوتن ثانیه برکران متر، که تسلا (T) نامیده می‌شود.

با توجه به مطالب گفته شده در بالا می‌توان گفت: نیروی کل وارد بر بار متحرک، چنانچه میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هر دو موجود باشند، برابر است با $\vec{F}_e+\vec{F}_m$.

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}) \qquad (۶-۸)$$

که این نیروی کل به نیروی لورنتس معروف است.

شباهت این دونیرو $\vec{F}_e+\vec{F}_m$ در آن است که بزرگی هر دو نیرو به حاصل ضرب بارها و عکس مجذورفاصله بین آنها بستگی دارد. ولی نیروی مغناطیسی یک نیروی مرکزی نیست و به دلیل اینکه $\vec{V}.\vec{F}_m=0$ است، نیروی مغناطیسی هرگز بر روی یک ذره باردار کار انجام نمی‌دهد.

میدان‌های حاصل از بار q_1 که حرکت یکنواخت دارد، با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\vec{B}=\frac{\vec{V}_1}{C}\times\frac{\vec{E}}{C} \qquad (۷-۸)$$

که درآن $\vec{E}$ میدان الکتریکی ناشی از بار q_1

$$C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\times10^{8}\,(\frac{m}{s}) \qquad (۸-۸)$$

سرعت نوراست. (در دستگاه یکاهای گاوسی، به جای $\vec{B}$ دراین روابط از $\frac{B}{C}$ استفاده می‌کنیم.)

نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان

نیروی وارد بر جزء dl از سیمی واقع در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر است با:

$$d\vec{F}=I\,d\vec{l}\times\vec{B} \qquad (۹-۸)$$

بنابراین، مقدارنیروی وارد بر یک مدار که با منحنی C مشخص می‌شود، در یک میدان یکنواخت برابر صفر است.

$$\vec{F}=\oint_C I\,d\vec{l}\times\vec{B}=0 \quad (\text{یکنواخت } B) \qquad (۱۰-۸)$$

وگشتاورنیروی وارد بر مدار، برای یک میدان B ی ثابت، عبارت است از:

$$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B} \qquad (۱۱-۸)$$

که $\vec{m}$، گشتاوردوقطبی مغناطیسی مدار، به صورت زیراست:

$$\vec{m}=\frac{1}{2}I\oint_C \vec{r}\times d\vec{l}$$

انتگرال $\frac{1}{2}\oint_C \vec{r}\times d\vec{l}$ برداری است که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از مساحتهای سطوح محور شده توسط تصاویر منحنی C بر صفحات مختصات.

اگر جریان به جای محصور بودن در سیم‌ها، در محیط جریان داشته باشد، آنگاه بهتر است $I\,d\vec{l}$ را با $\vec{J}\,dv$ برابر بگیریم:

$$I\,d\vec{l}\rightarrow\vec{J}\,dv \qquad (۱۳-۸)$$

قانون بیو و ساوار

میدان مغناطیسی تولید شده توسط عنصر جریان $I\,dl'$ برابر است با:

Physicsclass.blogsky.com

$$d\vec{B}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (۸-۱۴)$$

که در آن $\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\frac{N}{A^2}$ در دستگاه یکاهای mks است. با انتگرال‌گیری از این رابطه در یک مدار، میدان یک مدار کامل محاسبه می‌شود. برای یک توزیع جریان کلی $\vec{J}(r')$ به منزله چشمه، داریم:

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(r')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' \qquad (۸-۱۵)$$

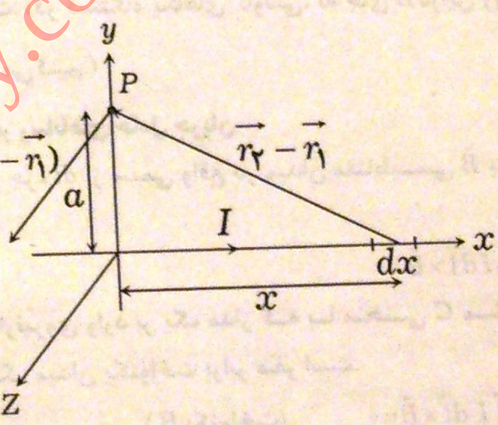
با مشتق‌گیری از این معادله در می‌یابیم که هیچ تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (۸-۱۶)$$

کاربردهای مقدماتی قانون بیو وساوار

میدان مغناطیسی یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان: برای سیمی در امتداد محور X، که از منهای بی‌نهایت تا به اضافه بی‌نهایت امتداد دارد و جریان I را حمل می‌کند، میدان در نقطه‌ای مثل r_2 بر روی محور y با استفاده از قانون بیوساوار برابر است با:

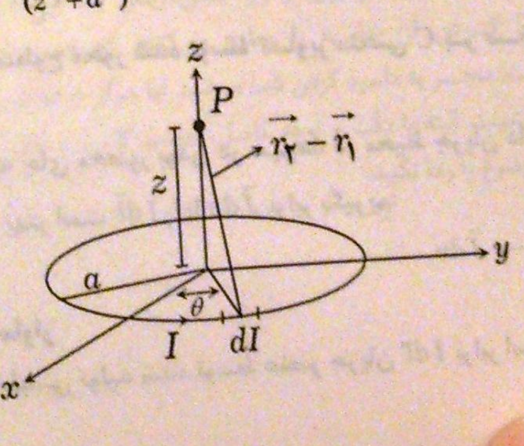
$$\vec{B}(r_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k} \qquad (۸-۱۷)$$



جهت حاصل برای میدان B با نتیجه ساده‌ای که جهت $\vec{B}$ را با قاعده دست راست معلوم می‌کند توافق کامل دارد.

میدان مغناطیسی محوری یک حلقه سیم دایره‌ای حامل جریان: یک حلقه سیم دایره‌ای که حامل جریان I است در صفحه xy در نظر می‌گیریم، میدان در نقطه $\vec{r}_2$ واقع بر محور z با استفاده از قانون بیووساوار به صورت زیر بدست می‌آید:

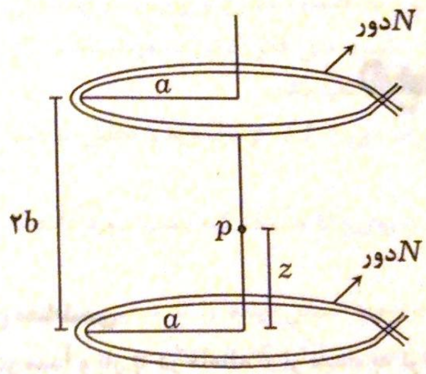
$$\vec{B}(Z)=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a}{(z^2+a^2)^{\frac{2}{3}}}\hat{k} \qquad (۸-۱۸)$$



این میدان تماماً در امتداد محور z است.

میدان محوری پیچه هلمهولتز: پیچه هلمهولتز از دو پیچه مستدیر با شعاعهای مساوی و محور مشترک تشکیل شده است. فاصله بین دو صفحه پیچه‌ها برابر شعاع پیچه‌ها است تا مشتق دوم $\vec{B}$ در نقطه‌ای واقع بر محور پیچه‌ها به فاصله مساوی از هر یک از آنها صفر شود. در واقع:

$2b=a$



میدان مغناطیسی درنقطه وسط برابر است با:

$$B_0=\frac{\mu_0 NI}{a}\frac{8}{5^{(\frac{3}{2})}} \qquad (۸-۱۹)$$

پیچه‌های هامهولتز غالباً برای تولید یک میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت درناحیه کوچکی از فضا به کارمی‌روند.

برای ناحیه‌ای که در آن $\left|z-\frac{a}{2}\right|$ کمتر از $\frac{a}{10}$ باشد، $B_Z(Z)$ با مقدار $B(\frac{a}{2})$ به مقداری کمتر از یک ونیم در ده هزار تقاوت می‌کند.

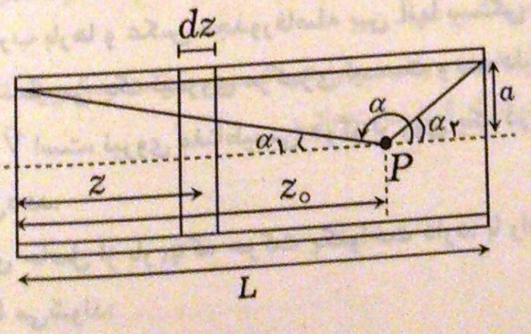
در دستگاه گاوسی، (یک گاوس برابر با 10^{-4} تسلاست) میدان مغناطیسی در نقطه وسط پیچه هلمهولتز به صورت زیر است:

$$B_2=\frac{32\pi N}{5^{\frac{3}{2}}a}\frac{I}{10} \qquad (۸-۲۰)$$

که درآن I برحسب آمپر، a برحسب سانتی‌متر و B برحسب گاوس است.

میدان محوری یک سیملوله: سیملوله سیمی است که آن را N دور با فاصله یکنواخت روی سطح استوانه‌ای به شعاع a و طول l پیچیده باشند.

$$B_z(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{L}\left[\frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{2}\right] \qquad (۸-۲۱)$$



Physicsclass.blogsky.com

اگر طول سیملوله در مقایسه با شعاع آن بلند باشد و z_0 به هیچ یک از دو مقدار صفر یا L نزدیک نباشد، آنوقت α_1 و α_2 هر دو زاویه‌های کوچکی خواهند بود و می‌توان آنها را به صورت‌های تقریبی زیر نوشت:

$$\alpha_1 \approx \frac{a}{z_0} \;,\; \alpha_2 \approx \frac{a}{L-z_0}$$

با بسط $\cos\alpha_1$، $\cos\alpha_2$ و نگه داشتن جملات تا درجه دوم، نتیجه زیربدست می‌آید:

$$B_z(z_0) \approx \frac{\mu_0 NI}{L}\left[1-\frac{a^2}{4z_0^2}-\frac{a^2}{4(L-z_0)^2}\right] \qquad (۲۲-۸)$$

قانون مداری آمپر

برای یک توزیع جریان پایا ($\vec{\nabla}.\vec{J}=0$)، شکل دیفرانسیلی قانون آمپربه صورت زیراست:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(r_2)=\mu_0\vec{J}(r_2) \qquad (۲۳-۸)$$

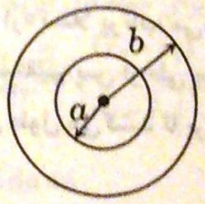
وبا استفاده ازقضیه استوکس، قانون مداری آمپررا می‌توان به صورت زیربیان کرد:

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0\int_s \vec{J}.\hat{n}da=\mu_0 I \qquad (۲۴-۸)$$

که I کل جریانی است که از S، سطح محصورشده توسط C، می‌گذرد. درمعدودی از وضعیت‌های خاص که در آنها تقارن کافی وجود دارد و بزرگی و جهت $\vec{B}$ نسبت به یک منحنی مناسب مثل C ثابت است، استفاده ازاین قانون برای محاسبه B عملاً سودمند است.

میدان مغناطیسی یک کابل هم محور رسانا

یک کابل هم محورکه از یک رسانای کوچک مرکزی به شعاع a و یک رسانای خارجی به شکل استوانه‌ای هم محوربا سیم مرکزی به شعاع b تشکیل شده است، به صورت شکل زیردرنظرمی‌گیریم:



هردورسانا جریان یکسان I را حمل می‌کنند و جهت جریان در آن دوعکس یکدیگراست. فرض می‌کنیم جریان سیم مرکزی به سمت بیرون ازصفحه کاغذ باشد. میدان مغناطیسی درنقاط داخل و خارج کابل برابراست با:

$$2\pi rB=\mu_0 I \qquad a<r<b \qquad (۲۵-۸)$$

$$2\pi rB=0 \qquad b<r$$

ازتقارن مسئله روشن است که B در همه جا باید مماس بر دایره‌ای باشد که مرکز آن منطبق بر مرکز رسانای مرکزی است. و همچنین به زاویه سمتی بستگی ندارد.

پتانسیل برداری مغناطیسی

چون دیورژانس هر تاو صفر است، پس منطقی است که میدان مغناطیسی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (۲۶-۸)$$

میدان برداری $\vec{A}$ به نام پتانسیل برداری مغناطیسی خوانده می‌شود. برای یک توزیع جریان مشخص $\vec{J}(r')$:

$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(r')}{|r-r'|}dv' \qquad (۲۷-۸)$$

میدان مغناطیسی یک مدار در فواصل دور

پتانسیل برداری مغناطیسی مدار کوچکی که در فواصل دور قرار گرفته برابر است با:

$$\vec{A}(r_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_2}{r_2^3} \qquad (۲۸-۸)$$

در محاسبه $\vec{A}(r_2)$ فرض شده است که همواره $r_1<<r_2$ است. بنابراین معادله بالا برای هر مبداء مختصات اختیاری معتبر نیست، بلکه فقط برای مبدای که نزدیک به مدار صادق است.

و میدان مغناطیسی با محاسبه تاو معادله بالا بدست می‌آید:

$$\vec{B}(r_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r_2^3}+\frac{3(\vec{m}.\vec{r}_2)\vec{r}_2}{r_2^5}\right] \quad \text{(دوقطبی مغناطیسی)} \qquad (۲۹-۸)$$

این معادله نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار درفاصله دوربه جزئیات شکل هندسی آن بستگی ندارد، بلکه فقط به گشتاورمغناطیسی آن، یعنی $\vec{m}$، مربوط می‌شود. و ازنظرصوری همانند میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی است، و این توجیهی است برای اطلاق نام میدان دوقطبی مغناطیسی به آن.

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی

درناحیه‌هایی که $\vec{J}=0$ است می‌توان یک پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی $\varphi^*(r)$ تعریف کرد (چون $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$)، به طوری که:

$$\vec{B}=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^* \qquad (۳۰-۸)$$

φ^*، مانند پتانسیل الکتروستاتیکی درمعادله لاپلاس صدق می‌کند ($\vec{\nabla}.\vec{B}=0$):

$$\nabla^2\varphi^*=0 \qquad (۳۱-۸)$$

ولی شرایط مرزی متفاوت ممکن است دسته‌های متفاوتی ازپاسخهای معادله لاپلاس را مطرح سازند. پاسخ دوقطبی با پاسخ دوقطبی الکتریکی یکسان است:

$$\varphi^*(r)=\frac{\vec{m}.\vec{r}}{4\pi r^3} \qquad (۳۲-۸)$$

و همچنین می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi^*(P)=-\frac{I\Omega}{4\pi}$$

که در آن Ω زاویه فضایی در برگیرنده منحنی C از نقطه P است.

شار مغناطیسی

شار مغناطیسی به صورت زیر بیان می‌شود و برحسب وبر (Wb) اندازه‌گیری می‌شود:

$$\Phi=\int_s \vec{B}.\hat{n}da$$

Physicsclass.blogsky.com

شاری که از هر سطح بسته می‌گذرد برابر با صفر است:

$$\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV=0$$

بنابراین، شاری که از هر مدار می‌گذرد به سطح خاصی که برای محاسبه شار به کار می‌بریم بستگی ندارد.

مسائل فصل هشتم

۸ – ۱ – ذرهٔ بارداری به جرم m و بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 حرکت می‌کند. نشان دهید که کلی‌ترین مسیر حرکت ذره، مارپیچی است که مقطع آن دایره‌ای به شعاع $R=mv_\perp/qB$ است. (در اینجا $v_\perp$ مؤلفهٔ سرعت ذره در امتداد عمود بر B_0 است.)

حل:

$$\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}=q\vec{V}\times\vec{B}\ (1)\ ,\ \vec{B}=B_0\hat{K}\ ,\ \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\dot{\vec{r}}=\vec{V}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}\ ,\ \ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$$

با جایگذاری این روابط دررابطه (۱) داریم:

$$m\ddot{x}=qB_0\dot{y} \Rightarrow m\dot{x}=qB_0y+C_1 \Rightarrow \dot{x}=wy+C'_1$$

$$m\ddot{y}=-qB_0\dot{x} \Rightarrow m\dot{y}=-qB_0x+C_2 \Rightarrow \dot{y}=-wx+C'_2$$

$m\ddot{z}=0 \Rightarrow \dot{z}=$ ثابت

$\Rightarrow z=ct+z_0$ (حرکت یکنواخت درراستای z)

که درآن $w=\frac{qB_0}{m}, C'_1=\frac{C_1}{m}, C'_2=\frac{C_2}{m}$ است.

$$\ddot{x}=w\dot{y}=w(-wx+C'_2)=-w^2x+w^2(\frac{C'_2}{w})$$

$$=-w^2x+w^2a \quad a=\frac{C'_2}{w}$$

$$\ddot{x}+w^2x=w^2a \Rightarrow x=a+A\cos(wt+\theta_0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=-Aw\sin(wt+\theta_0)\\ \dot{x}=wy+C'_1\end{array}\right\} \Rightarrow y=b-A\sin(wt+\theta_0)$$

$$,b=-\frac{C'_1}{w}$$

ترکیب این دومعادله، دایره‌ای به شعاع A است:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=A^2$$

بنابراین حرکت ذره مارپیچی است با مقطع دایره‌ای به شعاع $R=A$، برای یافتن شعاع این دایره به صورت زیرعمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=-Aw\sin(wt+\theta_0)\\ \dot{y}=-Aw\cos(wt+\theta_0)\end{array}\right\} \Rightarrow V_\perp^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=A^2w^2$$

$$\Rightarrow V_\perp=Aw=A\frac{qB_0}{m}$$

$$\Rightarrow A=R=\frac{mV_\perp}{qB_0}$$

۸ – ۲ – هامیلتونی ذرهٔ باردار در حال حرکت در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0، که موازی محور z است، با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$H=\frac{1}{2m}p^2-\frac{qB_0}{2m}(xp_y-yp_x)+\frac{q^2B_0^2}{8m}(x^2+y^2)$$

نشان دهید که معادلات حرکتی که از H نتیجه می‌شوند، با نتایج مسئلهٔ ۸-۱ سازگارند.

حل: معادلات هامیلتونی برای مختصه x به صورت زیرهستند:

$$p^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_x}=\dot{x} \Rightarrow \frac{P_x}{m}+\frac{qB_0}{2m}y=\dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_x=m\ddot{x}-\frac{qB_0}{2}\dot{y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\dot{P}_x \Rightarrow -\frac{qB_0}{2m}P_y+\frac{q^2B_0^2}{4m}x=-\dot{P}_x \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow -\frac{qB_0}{2m}P_y+\frac{q^2B_0^2}{4m}x$$

$$=-m\ddot{x}+\frac{qB_0}{2}\dot{y} \qquad (3)$$

از طرفی برای مختصه y داریم:

$$\frac{\partial H}{\partial P_y}=\dot{y} \Rightarrow \frac{P_y}{m}-\frac{qB_0}{2m}x=\dot{y}$$

$$\Rightarrow P_y=m\dot{y}+\frac{qB_0}{2}x$$

با جایگذاری P_y دررابطه (۳) داریم:

$$m\ddot{x}=qB_0\dot{y}$$

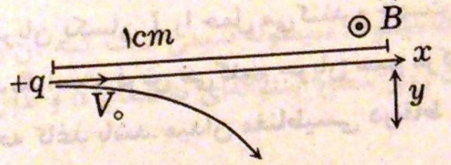
وبه همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$m\ddot{y}=-qB_0\dot{x}$$

که همان نتایج مسئله (۸-۱) هستند.

۸ – ۳ – پروتونی با سرعت 10^7 متر بر ثانیه در امتداد عمود بر یک میدان مغناطیس به شدت ۰/۱ تسلا پرتاب می‌شود. (الف) انحراف مسیر ذره از امتداد خط مستقیم پس از طی مسافت ۱ سانتی متر چقدر است؟ (ب) چه زمانی طول می‌کشد تا پروتون یک قوس ۹۰° را بپیماید؟

حل:



الف) پروتون تحت تاثیر میدان B که عمود بر صفحه به سمت خارج است، به اندازه y منحرف می‌شود، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}x=V_0t \Rightarrow t=\frac{x}{V_0}\\ y=\frac{1}{2}at^2\\ f=ma=eV_0B \Rightarrow a=\frac{eV_0B}{m}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}(\frac{eV_0B}{m})(\frac{x}{V_0})^2=\frac{eB}{2mV_0}x^2$$

Physicsclass.blogsky.com

$$y=\frac{1/6\times10^{-19}\times0/1}{2\times(1/67\times10^{-27}\,kg)\times10^{7}}(10^{-2})^{2}=4/8\times10^{-5}\,(m)$$

ب)

$$qVB=m\frac{V^2}{r}\Rightarrow qB=\frac{mV}{r}\ ,\ V=r\omega\ ,\ \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$qB=m\omega\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{qB}{m}\Rightarrow T=\frac{2\pi m}{qB}$$

زمان مطلوب t برابر یک چهارم دوره تفاوت است، بنابراین:

$$t=\frac{T}{4}\Rightarrow t=\frac{2\pi m}{4qB}=\frac{2\pi(1/67\times10^{-27}\,kg)}{4(1/6\times10^{-19})\times0/1}=1/64\times10^{-7}\,(s)$$

۸-۴- نشان دهید که قانون نیرو، معادلهٔ (۸-۲۵)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_2=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_1\oint_2 dI_2\cdot dI_1\frac{r_2-r_1}{|r_2-r_1|^3}$$

که آشکارا متقارن است، یعنی $F_2=-F_1$.

حل: معادله (۸-۲۵) به صورت زیر است:

$$\vec F_2=\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_1\oint_2\frac{d\vec L_2\times\left[d\vec L_1\times(\vec r_2-\vec r_1)\right]}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}$$

وبا توجه به قاعده (back cab) داریم:

$$\vec A\times(\vec B\times\vec C)=\vec B(\vec A\cdot\vec C)-\vec C(\vec A\cdot\vec B)$$

$$\vec F_2=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\left[\oint_1 d\vec L_1\oint_2\cdot\left[d\vec L_2\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}\right]-\oint\oint d\vec L_1\cdot d\vec L_2\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}\right]$$

با استفاده از قضیهٔ استوکس برای جملهٔ اول داریم:

$$\oint_2 d\vec l_2\cdot\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}=\int_{s_2}\vec\nabla\times\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}\cdot\hat n\,da$$

$$=\int_{s_2}\vec\nabla\times\vec\nabla\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_1|}\hat n\,da=0$$

بنابراین:

$$\vec F_2=\frac{-\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_1\oint_2 d\vec L_1\cdot d\vec L_2\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}$$

۸-۵- فرض کنید سیملولهٔ بسیار درازی ۱۰۰۰ دور در سانتی‌متر دارد و جریان (ابر رسانشی) ۱۰ آمپر را حمل می‌کند. نیروی شعاعی در واحد طول، یعنی f، را که بر هر دور از سیم پیچ وارد می‌شود، به دست آورید. نشان دهید که کشش T در سیم برابر است با $T=fa$، که در آن a شعاع سیملوله است.

حل: می‌دانیم میدان مغناطیسی یک سیملوله برابر است با:

$$B=\mu_0nI=\mu_0\frac{N}{L}I$$

بنابراین چگالی انرژی و در نتیجه مقدار انرژی کل برابر است با:

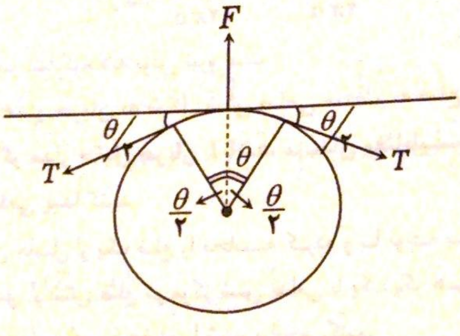
$$u=\frac{1}{2}\vec H\cdot\vec B=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{1}{2}\frac{(\mu_0nI)^2}{\mu_0}$$

$$U=\int u\,dV=\frac{1}{2}\frac{(\mu_0nI)^2}{\mu_0}(\pi r^2L)\Rightarrow$$

$$F_r=-\frac{\partial U}{\partial r}=-\mu_0n^2I^2\pi Lr$$

بنابراین نیرو در واحد طول وبر هردور:

$$f=\frac{Fr}{N2\pi r}=\frac{1}{2}\mu_0\frac{N}{L}I^2$$



برای زوایای کوچک در حالت تعادل داریم:

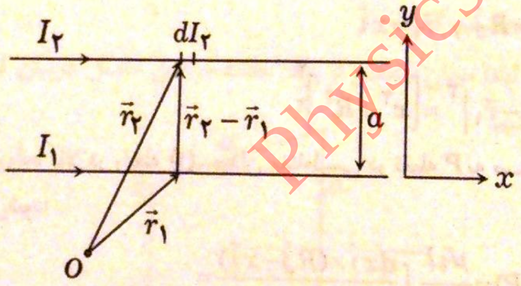
$$F=fa\theta\qquad(1)$$

$$F=2T\sin\frac{\theta}{2}\approx T\theta\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow fa\theta=T\theta\Rightarrow T=fa$$

۸-۶- نشان دهید که نیروی بین دو سیم موازی با جریانهای هم جهت I_1 و I_2، از نوع نیروی جاذبه است. اگر دو سیم موازی خیلی دراز و به فاصلهٔ a از یکدیگر باشند، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ dI_2 از سیم ۲ را حساب کنید.

حل: با توجه به رابطه $\vec F=I\,d\vec l\times\vec B$ وقانون دست راست می‌توان به سادگی دید که نیروی بین دو سیم موازی با جریانهای هم جهت ازنوع جاذبه است.



همچنین با توجه به مسأله (۸-۴) مقدارنیرویی وارد بر جزء جریان dI_2 برابر است با:

$$d\vec F_2=\frac{-\mu_0}{4\pi}I_1I_2d\vec I_1\cdot d\vec I_2\frac{(\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}$$

همانطورکه در شکل نشان داده شده I_2,I_1 هم جهت و در جهت مثبت محور x ها هستند بنابراین:

$$A=\frac{-\mu_0}{4\pi}I_1I_2d\vec I_1\cdot d\vec I_2\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}>0$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\Rightarrow d\vec{F}_2=-A(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

بنابراین $d\vec{F}_2$ درخلاف جهت $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ بوده ونیروجاذبه است.

میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۱) درمحل سیم (۲) برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B}_1(\vec{r}_2)=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{k}\\ \vec{F}_2=I_2\, d\vec{L}_2\times\vec{B}_1(\vec{r}_2)\\ d\vec{L}_2=dx\,\hat{i}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

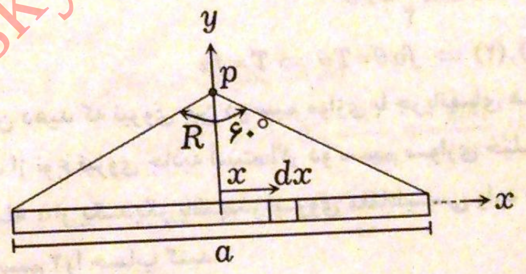
$$\vec{F}_2=I_2(dx\,\hat{i})\times\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{k}\right)=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}dx\,\hat{j}$$

علامت منفی نیز نشانگرجاذبه بودن نیرو است.

۸ – ۷ – یک مدار جریان به شکل شش ضلعی منتظم به ضلع a را در نظر بگیرید. اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز شش ضلعی پیدا کنید.

حل: ابتدا میدان حاصل از یک ضلع را محاسبه کرده و با توجه به اینکه میدان‌های حاصل از شش ضلع در مرکز شش ضلعی با یکدیگر هم جهت هستند، نتیجهٔ حاصل برای یک ضلع را شش برابر می‌کنیم.

برای محاسبه میدان حاصل از یک ضلع، میدان حاصل از یک سیم به طول a را که حامل جریان I است روی عمود منصف آن را محاسبه می‌کنیم:



$$\vec{B}(P)=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int\frac{d\vec{L}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}\ (1)\ ,\ I_1=I\ ,\ d\vec{L}_1=dx\,\hat{i}\ ,$$

$$\vec{r}_2=R\hat{j}\ ,\ \vec{r}_1=x\hat{i}$$

$$\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3=\left[x^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۱)، میدان مغناطیسی در نقطه P به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\vec{B}(P)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dx\,\hat{i}\times(R\hat{j}-x\hat{i})}{\left[x^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{K}=$$

برای حل انتگرال ازتغییرمتغیر $x=R\tan\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$x=R\tan\theta\ \Rightarrow\ dx=R\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{R\sec^2\theta\, d\theta}{(R^2\tan^2\theta+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{R^2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos\theta\, d\theta=\frac{1}{R^2}\sin\theta\Big|_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{R^2}$$

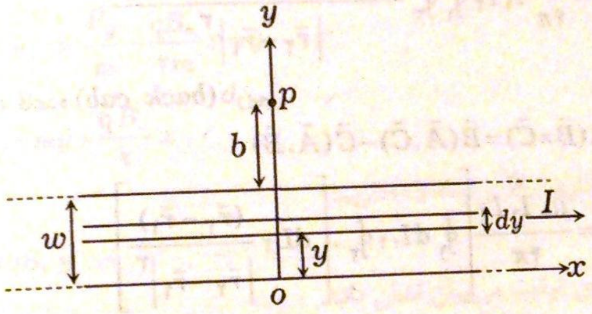
$$\left.\begin{array}{l}\vec{B}(P)=\dfrac{\mu_0 IR}{4\pi}\left(\dfrac{1}{R^2}\right)\hat{k}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{k}\\ \tan 30=\dfrac{\frac{a}{2}}{R}\ \Rightarrow\ R=\dfrac{a}{2\tan 30}=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\vec{B}(P)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)}\hat{k}=\frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{6\pi a}\hat{k}$$

$$\vec{B}_{tatal}=6\vec{B}=\frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{\pi a}\hat{k}$$

۸ – ۸ – نوار فلزی باریک و بسیار درازی به عرض w را در نظر بگیرید. جریان در این نوار یکنواخت و در امتداد طول آن بوده و مقدار کل آن I است. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای واقع در صفحهٔ نوار و به فاصلهٔ b از لبهٔ نزدیک‌تر آن حساب کنید.

حل:



می‌دانیم که میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم به فاصله a از آن برابر است با:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k}\ \ \ldots\ldots \xrightarrow{a\downarrow p} \ldots\ldots \rightarrow\ x$$

بنابراین می‌توان میدان حاصل ازجزء جریان $(dI=\frac{I}{w}dy)$ به صورت زیربیان کرد:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0\, dI}{2\pi\left[b+(w-y)\right]}\hat{k}=\frac{\mu_0 I}{2\pi w}\frac{dy}{\left[b+(w-y)\right]}\hat{k}$$

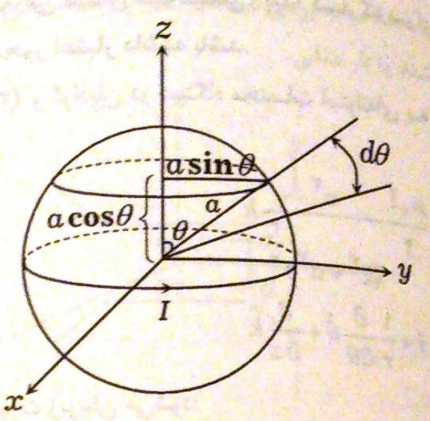
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi w}\hat{k}\int_0^w\frac{dy}{\left[b+(w-y)\right]}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi w}\hat{k}\left[-\ln(b+w-y)\right]_0^w=\frac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(\frac{b+w}{b}\right)\hat{k}$$

۸ – ۹ – سیم نازکی N دور به صورت دایره‌های نزدیک به هم و در یک لایه بر روی سطح کرهٔ چوبینی به شعاع a پیچیده شده است؛ N عددی است بزرگ، صفحات دایره‌ها بر محور کره عمودند و سطح آن را کاملاً می‌پوشانند. اگر جریان در این سیم پیچ I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز کره محاسبه کنید.

Physicsclass.blogsky.com

حل:



می‌دانیم میدان حاصل از یک حلقه جریان به شعاع r در نقطه‌ای بر روی محورآن و به فاصله z از مرکز آن برابراست با:

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

در اینجا شعاع حلقه‌ها $r=a\sin\theta$، $z=a\cos\theta$ است. بنابراین میدان حاصل ازجزء جریان dI برابر است با:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 dI}{2}\frac{(a\sin\theta)^2}{\left[a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$=\frac{\mu_0}{2a}\sin^2\theta\, dI\,\hat{K} \qquad (1)$$

dI جریان درحلقه باریک بین زاویه θ, $\theta+d\theta$ است، بنابراین:

$$dI=\frac{NI}{\pi a}a\,d\theta=\frac{NI}{M}d\theta \qquad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{2a}\sin^2\theta\frac{NI}{\pi}d\theta\hat{k} \Rightarrow$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi a}\hat{k}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{2\pi a}\hat{k}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi=\frac{\mu_0 NI}{4a}\hat{k}$$

۸-۱۰- سیملوله‌ای به طول ۱۵ سانتی‌متر در دو لایه پیچیده شده است. هر لایه ۱۰۰ دور سیم دارد؛ لایهٔ اول به شعاع ۲ سانتی متر و لایهٔ دوم به شعاع ۲٫۵ سانتی‌متر است. (الف) اگر این سیم پیچ حامل یک جریان ۲ آمپری باشد، میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف محور سیملوله پیدا کنید. (ب) میدان مغناطیسی محوری را بر حسب تابعی از فاصلهٔ بین مرکز سیملوله تا یک انتهای آن رسم کنید.

حل: با توجه به مثال (۸-۴) و معادلهٔ (۸-۴۵) می‌توان میدان مغناطیسی سیم لوله را به صورت زیر نوشت: (معادله (۸-۴۵))

$$B_z(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{L}\frac{a^2}{2}\int_0^L\frac{dz}{\left[(z_0-z)^2+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_{total}(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{2L}\left[a_1^2\int_0^L\frac{dz}{\left[(z_0-z)^2+a_1^2\right]^{\frac{3}{2}}}+a_2^2\int_0^L\frac{dz}{\left[(z_0-z)^2+a_2^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

برای حل انتگرال از تغییرمتغیر $z_0-z=a_1 ton\theta$ استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$z_0-z=a_1\tan\theta \Rightarrow -dz=a_1\sec^2\theta\, d\theta$$

$$B_{total}(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{2L}\left[\frac{-(Z_0-Z)}{\left[(z_0-z)^2+a_1^2\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{-(Z_0-Z)}{\left[(z_0-z)^2+a_1^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]_0^L$$

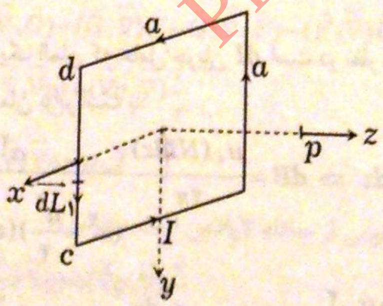
$$=\frac{\mu_0 NI}{2L}\left[\frac{-(Z_0-L)}{\left[(z_0-L)^2+a_1^2\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{Z_0}{(z_0^2+a_1^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.\frac{-(Z_0-L)}{\left[(z_0-L)^2+a_2^2\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{Z_0}{(z_0^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

با جایگذاری اعداد مفروض، میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف محورسیملوله بدست می‌آوریم.

۸-۱۱- سیملوله‌ای با مقطع مربع شکل (یعنی سیملوله‌ای که تمام دورهای آن به شکل مربع‌اند) N دور سیم در واحد طول دارد و حامل جریان I است. طول هر ضلع از مقطع این سیملوله a است. اگر سیملوله بسیار دراز فرض شود، میدان مغناطیسی محوری را در مرکز آن محاسبه کنید.

حل: ابتدا میدان حاصل از یک حلقه مربعی حامل جریان I را محاسبه می‌کنیم.



میدان حاصل از ضلع cd به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{B}(\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{L}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}$$

$$\vec{r}_2=z\hat{k}\ ,\ \vec{r}_1=\frac{a}{2}\hat{i}+y\hat{j}$$

$$\overrightarrow{dL_1}=dy\,\hat{j} \Rightarrow \overrightarrow{dL_1}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

Physicsclass.blogsky.com

$$=dy\,\hat{j}\times(z\hat{k}-\frac{a}{2}\hat{i}-y\hat{j})=zdy\,\hat{i}+\frac{a}{2}dy\,\hat{k}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int\frac{zdy}{\left[z^2+\frac{a^2}{4}+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{i}+\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int\frac{\frac{a}{2}dy}{\left[z^2+\frac{a^2}{4}+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

با توجه به تقارن حاکم بر مسئله، مولفه‌های در جهت $\hat{k}$ برای چهارضلع مربع برابر و با یکدیگر جمع می‌شوند و بقیه مولفه‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین میدان مغناطیسی کل در نقطه (P) روی محور حلقه برابر است با:

$$\vec{B}=4B_z\hat{k}$$

و برای محاسبه B_z به صورت زیر عمل می‌کنیم:

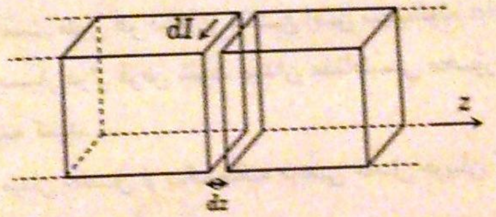
$$B_z=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{\frac{a}{2}dy}{\left[z^2+\frac{a^2}{4}+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\mu_\circ aI}{8\pi}\int_\circ^{\frac{a}{2}}\frac{dy}{\left[z^2+\frac{a^2}{4}+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2\mu_\circ aI}{8\pi}\left[\frac{y}{(z^2+\frac{a^2}{4})(z^2+\frac{a^2}{4}+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_\circ^{\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{\mu_\circ aI}{8\pi}\left[\frac{a}{(z^2+\frac{a^2}{4})(z^2+\frac{a^2}{2})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

بنابراین میدان کل در نقطه P:

$$\vec{B}=\frac{4\mu_\circ I}{8\pi}\left(\frac{a^2}{(z^2+\frac{a^2}{4})(z^2+\frac{a^2}{2})^{\frac{1}{2}}}\right)$$



در سیم‌لوله مورد نظر یک المان که حامل جریان dI است در نظر می‌گیریم. میدان حاصل از این المان برابر است با:

$$dI=NI\,dz\Rightarrow dB=\frac{\mu_\circ(NIdz)}{2\pi}\frac{a^2}{(z^2+\frac{a^2}{4})(z^2+\frac{a^2}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$B=\frac{\mu_\circ NIa^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+\frac{a^2}{4})(z^2+\frac{a^2}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

۸ – ۱۲ - میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع بر محور (محور x) یک دور سیم دایروی که حامل جریان I است، با معادلهٔ (۸–۳۸) داده شده است. با استفاده از این واقعیت که $\nabla.B=0$، یک رابطهٔ تقریبی برای B_r (مؤلفهٔ شعاعی میدان مغناطیسی) پیدا کنید که برای نقاط خیلی نزدیک به محور اعتبار داشته باشد.

حل: معادله (۸–۳۸) و گرادیان در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$\vec{B}(z)=\frac{\mu_\circ I}{2}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

بنابراین $\vec{\nabla}.\vec{B}$ به صورت زیربیان می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\circ$$

بدلیل تقارن حاکم در مسئله میدان B به θ بستگی ندارد و مولفه‌ای نیز در این راستا ندارد، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}B\theta=\circ\Rightarrow\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\circ$$

$$\Rightarrow\frac{\partial B_r}{\partial r}=-\frac{\partial B_z}{\partial z}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\mu_\circ Ia^2}{2}(-\frac{3}{2})(2z)(z^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{-3\mu_\circ Ia^2z}{2(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\qquad(2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

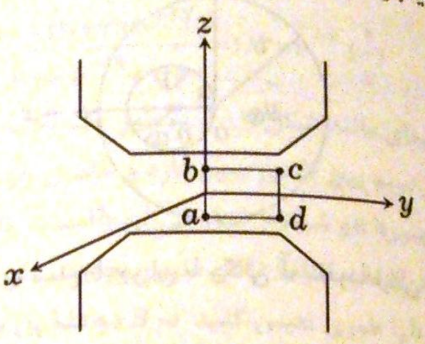
$$\frac{\partial B_r}{\partial r}=\frac{3\mu_\circ Ia^2z}{2(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\Rightarrow B_r=\frac{3\mu_\circ Ia^2zr}{2(z^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

۸ – ۱۳ - مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی در ناحیهٔ بین وجوه قطبهای یک شتاب دهندهٔ ذرات، به صورت $B_z=B_z(r,z)$ داده شده است، که در آن $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ فاصله از محور وجوه قطبهاست. الف) اگر $|B_z|$ تابعی نزولی از r باشد، نشان دهید که خطوط شدت مغناطیسی به سمت خارج خم می‌شوند، نظیر شکل ۸–۱۲، اعم از اینکه قطب بالایی قطب شمال باشد یا قطب جنوب. (راهنمایی: از این واقعیت که $\nabla\times B=\circ$ است و در صفحهٔ میانه $B_r=\circ$ است، استفاده کنید). ب) اگر خطوط B انحنایی نظیر آنچه در شکل آمده است داشته باشند، نشان دهید که ذرات شتابداری که از صفحهٔ میانه دور می‌شوند، تحت تأثیر نیروی بازگرداننده‌ای قرار می‌گیرند که آنها را

Physicsclass.blogsky.com

به طرف صفحهٔ میانه برمی‌گرداند، اعم از اینکه این ذرات دارای بار مثبت باشند یا بار منفی.

حل:



الف)

$$\vec{J}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}=0 \Rightarrow \oint_C \vec{B}.d\vec{l}=0$$

که C منحنی بسته $abcd$ است که درشکل نشان داده شده است.

با توجه به تقارن حاکم میدان مغناطیسی مولفه‌ای درجهت θ ندارد و می‌توان آن را به صورت زیرنوشت:

$$B_\theta=0 \qquad , \vec{B}=B_r\hat{r}+B_z\hat{k}$$

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l}=\int_c B_r dr+B_z dz=0$$

اگر فرض کنیم که اضلاع ab و cd در منحنی مفروض خیلی کوچک باشند و همچنین با در نظر گرفتن اینکه B_r در صفحه میانی (xoy) صفر است، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\oint_c B_z\,dz=0$$

اگر فرض کنیم که خطوط میدان $\vec{B}$، مستقیم هستند، بنابراین B_z از z مستقل است و از انتگرال بیرون خواهد آمد:

$$\left.\begin{matrix} B_z\oint dz=0 \\ \oint dz\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_z=0$$

که این نتیجه خلاف فرض مسئله است، بنابراین خطوط میدان خم می‌شوند.

و با توجه به مولفه θ رابطه $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ دردستگاه مختصات استوانه‌ای و فرض مسئله که B_z تابعی نزولی از r است، می‌توان نتیجه گرفت که این خطوط به سمت خارج خم می‌شوند.

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_\theta=\left(\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z}=\frac{\partial B_z}{\partial r}$$

$$\text{فرض مسئله}:\ \frac{\partial B_z}{\partial r}<0 \Rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z}<0 \Rightarrow \begin{cases} z>0 & \Rightarrow B_r<0 \\ z<0 & \Rightarrow B_r>0 \end{cases}$$

بنابراین اعم از اینکه قطب بالایی قطب شمال باشد و یا جنوب، خطوط میدان به سمت خارج خم می‌شوند.

ب) ذراتی که ازصفحه میانی (xoy) دور می‌شوند، دارای سرعت $\vec{V}=V\hat{K}$ هستند. بنابراین نیروی درجهت عمود بر $\hat{k}$, $\hat{r}$ بر آن اعمال می‌شوند:

$$\vec{F}=q\vec{V}\times\vec{B}=q(V\hat{k})\times(B_r\hat{r}+B_z\hat{k})=qVB_r\hat{\theta}$$

وذره در جهت $\hat{\theta}$ سرعت می‌گیرد، $V'=V'\hat{\theta}$، پس نیروی $\vec{F}'$ بر ذره اعمال می‌شود:

$$\vec{F}'=q\vec{V}'\times\vec{B}=qV'\hat{\theta}\times(B_r\hat{r}+B_z\hat{k})=qV'B_r(-\hat{k})+qV'B_z\hat{r}$$

بنابراین نیروی $\vec{F}'$ ذره را به صفحه میانی برمی‌گرداند.

۸ – ۱۴ – از معادلهٔ (۸–۳۰) پیداست که تنها برخی از میدانهای برداری واجد شرایط لازم هستند تا از لحاظ فیزیکی به عنوان میدان مغناطیسی القایی قابل درک باشند. (الف) ثابت کنید که بردار $B=(r/r)\times\nabla g(x,y,z)$ که در آن $g(x,y,z)$ یک تابع اختیاری است، میدان مغناطیسی مناسبی است. (ب) چنانچه g جوابی از معادلهٔ لاپلاس باشد، چگالی J را که این میدان مغناطیسی را تولید می‌کند، پیدا کنید.

حل: الف) باید نشان دهیم که $\vec{B}$ در معادله $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$ صدق می‌کند و از یک پتانسیل برداری $\vec{A}$ حاصل می‌شود:

$$\vec{B}=\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g$$

طبق رابطه (۸–۱–۱) ازجدول (۱–۱) داریم:

$$\vec{\nabla}.(\vec{F}\times\vec{G})=(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{G}-(\vec{\nabla}\times\vec{G}).\vec{F}$$

بنابراین برای میدان برداری $\vec{B}$ داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\vec{\nabla}.\left[\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g\right]=(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}).\vec{\nabla}g-(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g).\frac{\vec{r}}{r}$$

$$=\vec{\nabla}(\frac{1}{r})\times\vec{r}+\frac{1}{r}\vec{\nabla}\times\vec{r}=0 \qquad (1)$$

برای به دست آوردن پتانسیل برداری $\vec{A}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

همانطورکه در (۱) نشان داده شد $(\nabla\times\frac{\vec{r}}{r})$ صفر است، بنابراین می‌توان $(g\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r})$ را ازطرف چپ رابطه بالا کم کنیم:

$$\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g-g\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow -\vec{\nabla}g\times\frac{\vec{r}}{r}-g\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$-\vec{\nabla}\times(g\frac{\vec{r}}{r})=\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{A}=-g\frac{\vec{r}}{r}=-g(x,y,z)\frac{\vec{r}}{r} \qquad (2)$$

از نتایج (۱)،(۲) $\Leftarrow$ میدان $\vec{B}$، میدان مغناطیسی مناسبی است.

ب)

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

با توجه به رابطه (۱–۱–۱۰) از جدول (۱–۱) داریم:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{F}(\vec{\nabla}.\vec{G})+(\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F}-\vec{G}(\vec{\nabla}.\vec{F})-(\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G}$$

$$\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g)=\frac{\vec{r}}{r}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}g)+(\vec{\nabla}g.\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r}$$

$$-(\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r})\vec{\nabla}g-(\frac{\vec{r}}{r}.\vec{\nabla})\vec{\nabla}g=\mu_0\vec{J}$$

و چون g جوابی از معادله لاپلاس است، بنابراین:

$$\nabla^2 g=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{\nabla}g)=(\vec{\nabla}g.\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r}$$

$$-(\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r})\vec{\nabla}g-(\frac{\vec{r}}{r}.\vec{\nabla})\vec{\nabla}g=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{\nabla}g.\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r}+\frac{1}{r}\vec{\nabla}g-\frac{\vec{r}}{r}\nabla^2 g\right]$$

۸ – ۱۵ – نشان دهید که برای یک محیط همگن، همسانگرد و غیر مغناطیسی با رسانندگی g، که در آن جریانهای پایا وجود دارند، B در معادلهٔ برداری لاپلاس: $\nabla^2 B=0$ صدق می‌کند.

physicsclass.blogsky.com

حل: برای محیطی همگن و همسانگرد با رسانندگی g داریم:

$$\vec{J}=g\vec{E} \qquad (1)$$

و بدلیل وجود جریانهای پایا داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \qquad (2)$$

و همچنین برای میدان $\vec{B}$ داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \quad (3)\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}\times\mu_0\vec{J}=\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}$$

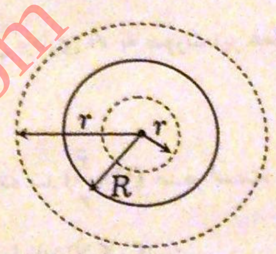
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{B})-(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{B}=\mu_0\vec{\nabla}\times g\vec{E}=\mu_0 g\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

با توجه به روابط (۱)،(۲)،(۳) داریم:

$$0-\nabla^2\vec{B}=0 \Rightarrow \nabla^2\vec{B}=0$$

۸ – ۱۶ – با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ r از مرکز یک سیم طویل حامل جریان I محاسبه کنید. این محاسبه را برای هر دو حالت $r<R, r>R$ انجام دهید؛ R شعاع سیم است. صریحاً نشان دهید که میدان مغناطیسی روی محور سیم صفر می‌شود.

حل:



بدلیل تقارن استوانه‌ای موجود میدان مغناطیسی تابعی از θ نیست بنابراین میدان مغناطیسی بر روی منحنی C مفروض (دایره‌ای به شعاع r) مقداری ثابت دارد. برای حالت $r<R$ داریم:

$$\left.\begin{aligned}&\oint\vec{B}.d\vec{l}=\mu_0 I_1 \;,\quad B2\pi r=\mu_0 I_1\\ &I_1=\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

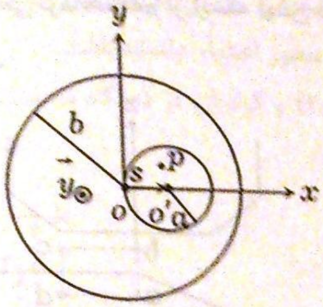
$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2\right)=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\hat{\theta}$$

و برای حالت، $r>R$ داریم:

$$\oint\vec{B}.d\vec{l}=\mu_0 I \Rightarrow B2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

۸ – ۱۷ – یک رسانای استوانه‌ای به شعاع b حاوی سوراخ استوانه‌ای شکلی به شعاع a است. محور سوراخ موازی با محور استوانه و در فاصلهٔ s از آن قرار دارد، به طوری که $a<s<b-a$. رسانا حامل جریان یکنواختی به چگالی J است. میدان B را در داخل سوراخ، روی قطری که بر یکی از قطرهای رسانا منطبق است، پیدا کنید. (راهنمایی: توزیع جریان معادلی را بررسی کنید که متشکل از چگالی J در سرتاسر سوراخ و رسانا، به اضافهٔ چگالی $-J$ در داخل سوراخ است.)

حل:



اگر از کل استوانه به شعاع b جریان با چگالی $\vec{J}$ بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه P به صورت زیر است:

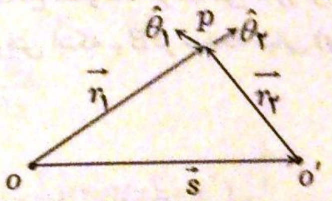
$$\oint_C \vec{B}_1.d\vec{l}=\mu_0\int_s \vec{J}.\hat{n}da$$

$$\Rightarrow B_1 2\pi r=\mu_0 J\pi r^2 \Rightarrow \vec{B}_1=\mu_0\frac{Jr}{2}\hat{\theta}_1$$

و اگر فقط از استوانه به شعاع a جریان با چگالی $-\vec{J}$ بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه $\vec{P}$ به صورت زیراست:

$$\oint_C \vec{B}_2.d\vec{l}=\mu_0\int_s \vec{J}.\hat{n}da$$

$$\Rightarrow B_2 2\pi r=-\mu_0 J\pi r^2 \Rightarrow \vec{B}_2=-\mu_0\frac{Jr}{2}\hat{\theta}_2$$



میدان مغناطیسی کل در نقطهٔ P برابر است با:

$$\vec{B}_{total}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$$

اگر $\vec{B}'_1,\vec{B}'_2$ را میدان‌های دوران یافته $\vec{B}_1,\vec{B}_2$ به اندازه ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم:

$$\vec{B}'_1=\mu_0\frac{J}{2}\vec{r}_1 \;,\; \vec{B}'_2=\frac{\mu_0 J}{2}(-\vec{r}_2)\Rightarrow$$

$$\vec{B}'_t=\frac{\mu_0 J}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0 J}{2}s\hat{i}$$

برای بدست آوردن $\vec{B}_t$، $\vec{B}'_t$ را به اندازه ۹۰° درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم:

$$\Rightarrow \vec{B}_t=\frac{\mu_0 J}{2}s\hat{j}$$

۸ – ۱۸ – طبق مسئلهٔ ۸-۱، مسیر حرکت یک ذرهٔ باردار به جرم m و بار q، در صفحه‌ای عمود بر میدان مغناطیسی B_0، دایره‌ای است به شعاع $R=mv_\perp/qB_0$. دوره‌های تناوب گردش یک الکترون و یک پروتون را در یک میدان مغناطیسی با شدت ۰٫۵ تسلا به دست آورید. (جرمهای الکترون و پروتون به ترتیب عبارت‌اند از $9/110\times10^{-30}\,kg$ و $1/6726\times10^{-27}$).

حل:

$$\left.\begin{aligned}&T=\frac{2\pi r}{V}\\ &R=\frac{mV_\perp}{qB_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow T=\frac{2\pi mV}{VqB_0}=\frac{2\pi m}{qB_0}$$

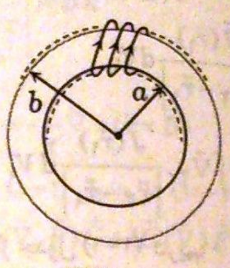
Physicsclass.blogsky.com

الکترون: $T=\dfrac{۲\pi\times(۰/۹۱۱\times۱۰^{-۳۰})}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۰/۵}=۷/۱۵\times۱۰^{-۱۱}\ (\frac{۱}{s})$

پروتون: $T=\dfrac{۲\pi\times(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۰/۵}=۱/۳\times۱۰^{-۷}\ (\frac{۱}{s})$

۸-۱۹- چنبره‌ای مانند شکل ۱۱-۲ به طور یکنواخت سیم پیچی شده است. این سیم پیچ N دور سیم دارد و حامل جریان I است. شعاع داخلی چنبره a و شعاع خارجی آن b است. (الف) میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف داخل سیم پیچ چنبره‌ای پیدا کنید. (ب) نسبت b/a را طوری تعیین کنید که B در داخل چنبره بیش از ۲۵ درصد تغییر نکند.

حل:



$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l}=\mu_\circ I \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ(NI)}{۲\pi r}$$

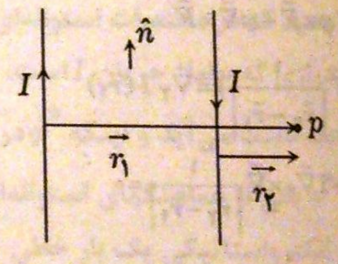
$$\left.\begin{array}{l} B(r=a)=B_a=\dfrac{\mu_\circ NI}{۲\pi a} \\ B(r=b)=B_b=\dfrac{\mu_\circ NI}{۲\pi b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{|B_b-B_a|}{B_a}\le ۲۵\% \Rightarrow \frac{\left|\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right|}{\frac{۱}{a}}\le ۲۵\%$$

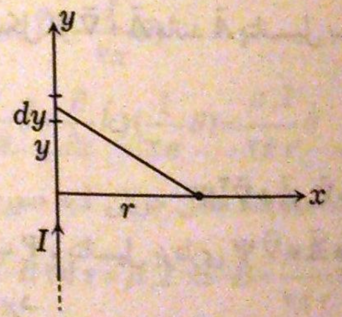
$$\frac{a}{b}\ge ۰/۷۵ \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۴}{۳}$$

۸-۲۰- نشان دهید که پتانسیل برداری مغناطیسی برای دو سیم طویل مستقیم و موازی که هر دو حامل جریان I در جهتهای مخالف هستند، با $A=(\mu_\circ I/۲\pi)\ln(r_۲/r_۱)n$ داده می‌شود که در آن $r_۱$ و $r_۲$ عبارت‌اند از فواصل نقطهٔ میدان از سیمها، و n بردار یکه‌ای موازی با سیمهاست.

حل:



پتانسیل برداری $\vec{A}$، حاصل از یک سیم طویل حامل جریان I در فاصله r از آن برابر است با:



$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I\,dy\,\hat{j}}{|r-r'|}$$

$$\vec{r}=r\hat{i}\ ,\ \vec{r}'=y\hat{j}$$

$$|r-r'|=\left[r^۲+y^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left[r^۲+y^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}}\hat{j}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\int_{\circ}^{+\infty}\frac{dy}{\left[r^۲+y^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}}$$

برای حل انتگرال از تغییر متغیر $y=r\tan\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$y=r\tan\theta \Rightarrow dy=r\sec^۲\theta d\theta$$

$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\int\frac{r\sec^۲\theta d\theta}{r\sec\theta}\hat{j}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\int\sec\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}(\ln\sec\theta+\tan\theta)$$

$$\vec{A}(r)=\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\left(\ln\frac{\sqrt{r^۲+y^۲}}{r}+\frac{y}{r}\right)\Big|_\circ^L$$

$$=\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\left(\ln\frac{\sqrt{r^۲+L^۲}}{r}+\frac{L}{r}\right)$$

بنابراین پتانسیل برداری $\vec{A}$ برای دوسیم موازی و حامل جریان‌های مختلف الجهت برابر است با:

$$\vec{A}=\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\left(\ln\frac{\sqrt{r_۱^۲+L^۲}}{r_۱}+\frac{L}{r_۱}\right)$$

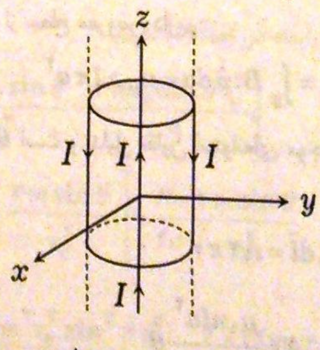
$$-\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\left(\ln\frac{\sqrt{r_۲^۲+L^۲}}{r_۲}+\frac{L}{r_۲}\right)$$

$$=\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\left[\ln\frac{\sqrt{r_۱^۲+L^۲}+L}{\sqrt{r_۲^۲+L^۲}+L}+\frac{r_۲}{r_۱}\right]$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{j}\ln\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\hat{n}\ln\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)$$

۸-۲۱- مجموعهٔ رساناهای زیر را در نظر بگیرید: یک سیم مستقیم بی‌نهایت طویل و یک پوستهٔ استوانه‌ای فلزی (به شعاع b) که سیم را احاطه کرده و با آن هم‌محور است. این دو رسانا جریان یکسان I را در جهات مخالف یکدیگر حمل می‌کنند. پتانسیل برداری مغناطیسی دستگاه را پیدا کنید.

حل:



میدان مغناطیسی برای $r<b$ به صورت زیر است:

Physicsclass.blogsky.com

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0 I \Rightarrow B2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} \qquad (1)$$

و برای بدست آوردن پتانسیل برداری $\vec{A}$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

و از تقارن مسئله پیداست که بردار $\vec{A}$ فقط در راستای Z است، بنابراین:

$$A_\theta , A_r=0$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}=-\frac{1}{r}r\hat{\theta}\frac{\partial A_z}{\partial r} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow A_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r+c \qquad (3)$$

با اعمال شرایط مرزی مسئله می‌توان ثابت c را بدست آورد.

مؤلفه مماسی پتانسیل برداری در مرز دو محیط باید پیوسته باشد، بنابراین:

$$(A_t)_{in}=(A_t)_{out} \Rightarrow \frac{-\mu_0 I}{2\pi}\ln b+c=0 \Rightarrow c=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln b$$

$$r>b \Rightarrow \vec{A}=0$$

و با جایگذاری در رابطه (۳)، پتانسیل برداری $\vec{A}$ برابر است با:

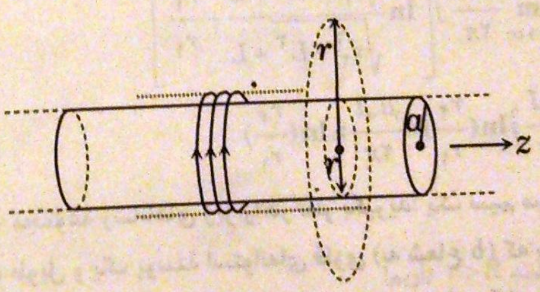
$$\vec{A}=(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{b})\hat{k}$$

۸ - ۲۲ - (الف) نشان دهید که، $\oint_C A.dl=\Phi$ که در آن Φ عبارت است از شار مغناطیسی گذرنده از سطحی که به وسیلهٔ مدار C محصور شده است. (ب) این نتیجه را همراه با قانون مداری آمپر به کار ببرید تا A را در فاصلهٔ r در داخل و خارج یک سیملوله بسیار دراز پیدا کنید.

حل: الف) می‌دانیم که شارمغناطیسی عبوری ازسطح s برابر است با:

$$\phi_B=\int_s \vec{B}.\hat{n}da=\int_s \vec{\nabla}\times\vec{A}.\hat{n}da \xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} \oint_c \vec{A}.d\vec{l}$$

ب)



می‌دانیم میدان مغناطیسی برای یک سیم لوله بسیار بلند به صورت زیر است:

$$\begin{cases}B=\mu_0 nI & r<a\\ B=0 & r>a\end{cases}$$

بنابراین برای شار عبوری از سطح مفروض داریم:

$$r>a: \quad \phi_B=\int_s B.\hat{n}da=\mu_0 nI\pi a^2 \qquad (1)$$

بردار $\vec{A}$ فقط در راستای θ است و بدلیل تقارن استوانه‌ای موجود تابعی از θ و Z نیست، بنابراین:

$$\phi_B=\oint_C \vec{A}.d\vec{l}=A2\pi r \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow A=\frac{\mu_0 nIa^2}{2r}\hat{\theta}$$

و برای حالت $r<a$

$$\phi_B=\int_S \vec{B}.\hat{n}da=\mu_0 nI\pi r^2 \qquad (3)$$

$$(3),(2) \Rightarrow A=\frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{\theta}$$

۸ - ۲۳ - (الف) با مشتق‌گیری مستقیم از معادلهٔ (۸-۶۱) نشان دهید که $\nabla.A=0$. (ب) نشان دهید چنانچه A پتانسیل برداری میدان B باشد، $A+\nabla\psi$ نیز یک پتانسیل برداری برای همان میدان B محسوب می‌شود؛ ψ یک تابع اختیاری است. (ج) نشان دهید که با انتخاب یک ψی مناسب، پتانسیل برداری مربوط به B می‌تواند هر دیورژانس مطلوبی را داشته باشد.

حل: الف) معادلهٔ (۸-۶) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{A}(\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}dV_1$$

$$\vec{\nabla}_2.\vec{A}(\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}_2.\frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}dV_1$$

و با توجه به رابطه (۱-۱-۷) از جدول (۱-۱) داریم:

$$\vec{\nabla}.(\varphi\vec{F})=\vec{\nabla}\varphi.\vec{F}+\varphi\vec{\nabla}.\vec{F}$$

و چون $\vec{J}(\vec{r}_1)$ تابعی از $\vec{r}_2$ نیست، بنابراین:

$$\vec{\nabla}_2.\vec{J}(\vec{r}_1)=0$$

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}_2.\frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}dV_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int\vec{\nabla}_2\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}.\vec{J}(\vec{r}_1)dV_1+\int\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\vec{\nabla}_2.\vec{J}(\vec{r}_1)dV_1\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}_2\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}.\vec{J}(\vec{r}_1)dV_1$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}_2\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}.I(\vec{r}_1)dV_1 \quad \underline{\text{قضیه استوکس}}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\vec{\nabla}_2\times(I(\vec{r}_1)\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}).\hat{n}da=0$$

با توجه به رابطه (۱-۱-۹) از جدول (۱-۱) داریم، انتگرال بالایی صفر می‌شود:

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{F})=\vec{\nabla}\varphi\times\vec{F}+\varphi\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}_2\times(I(\vec{r}_1)\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|})=\vec{\nabla}_2 I(\vec{r}_1)\times\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}+I\vec{\nabla}_2\times\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}=0$$

ب)

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\psi)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

بنابراین هرپتانسیلی به شکل $\vec{A}+\vec{\nabla}\Psi$ مانند $\vec{A}$ پتانسیل برداری میدان $\vec{B}$ محسوب می‌شود.

ج)

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}+\vec{\nabla}\Psi)=\vec{\nabla}.\vec{A}+\vec{\nabla}^2\Psi$$

بنابراین با انتخاب مناسب Ψ، پتانسیل برداری $\vec{A}+\vec{\nabla}\Psi$ هر واگرایی دلخواه و مطلوبی را می‌تواند بپذیرد.

Physicsclass.blogsky.com

۸-۲۴ - (الف) نشان دهید که تمام توابع زیر پتانسیلهای ممکن برای میدان یکنواخت $\vec{B}=B\hat{k}$ محسوب می‌شوند: $A_1=-By\hat{i}$ و $A_2=Bx\hat{j}$ و $A_3=-1/2\,\vec{r}\times\vec{B}$. (ب) برای کدام یک از اینها $\nabla.A=0$ است؟ (ج) نشان دهید که A_1-A_2 برابر است با گرادیان یک تابع، یعنی $\nabla\psi$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_1=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -By & 0 & 0\end{vmatrix}=B\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & Bx & 0\end{vmatrix}=B\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_3=\vec{\nabla}\times(-\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B})=-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{B})$$

و با توجه به رابطه (۱-۱-۱۰) در جدول (۱-۱) داریم:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{G})=(\vec{\nabla}.\vec{G})\vec{F}-(\vec{\nabla}.\vec{F})\vec{G}+(\vec{G}.\vec{\nabla})\vec{F}-(\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_3=-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{B})=-\frac{1}{2}\Big[(\vec{\nabla}.\vec{B})\vec{r}-(\vec{\nabla}.\vec{r})\vec{B}+(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{r}-(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{B}\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[0-3\vec{B}+(B\frac{\partial}{\partial z})(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z})(B\hat{k})\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[-3\vec{B}+B\hat{k}-0\Big]=-\frac{1}{2}(-2\vec{B})=\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}_1=\vec{\nabla}.(-By\hat{i})=0\ ,\qquad \vec{\nabla}.\vec{A}_2=\vec{\nabla}.(Bx\hat{j})=0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}_3=\vec{\nabla}.(-\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B})=-\frac{1}{2}\Big[(\vec{\nabla}\times\vec{r}).\vec{B}-(\vec{\nabla}\times\vec{B}).\vec{r}\Big]=0$$

در رابطه بالا از رابطه (۱-۱-۸) در جدول (۱-۱) استفاده شده است.

ج)

$$\vec{A}_1-\vec{A}_2=-By\hat{i}-Bx\hat{j}=-\vec{\nabla}(Bxy)=\vec{\nabla}\Psi$$
$$\Psi=-Bxy$$

۸-۲۵ - نشان دهید که در مختصات استوانه‌ای، میدان B در خارج از سیم مستقیم درازی که حامل جریان I است، از پتانسیل نرده‌ای $\varphi^*=-(I/2\pi)\theta$ به دست می آید و اینکه φ^* در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. چرا این φ^* یکی از هماهنگهای استوانه‌ای نیست (در صورتی که برای پتانسیل الکترواستاتیکی یک بار خطی چنین خواهد بود)؟

حل: برای میدان حاصل از یک پتانسیل نرده‌ای φ^* داریم:

$$\vec{B}=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^*=-\mu_0\vec{\nabla}(-\frac{I}{2\pi}\theta)$$

$$=\mu_0(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(\frac{I}{2\pi}\theta)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}\qquad(1)$$

و میدان حاصل از یک سیم بلند حامل جریان I به صورت زیر است:

$$\oint\vec{B}.dl=\mu_0 I\ \Rightarrow\ B2\pi r=\mu_0 I\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}\qquad(2)$$

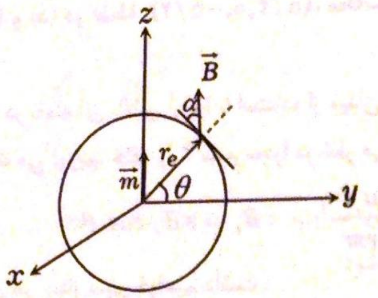
از روابط (۱)،(۲) کاملاً واضح است که میدان حاصل از سیم بلند حامل جریان I از پتانسیل نرده‌ای مذکور بدست می‌آید. و با در نظر گرفتن اینکه $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$ است می‌توان به صورت زیر نشان داد که φ^* در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$\vec{\nabla}^2\varphi^*=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi^*=\vec{\nabla}.(\frac{-\vec{B}}{\mu_0})=-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

ج) چون φ^* یک تابع تک مقداری نیست (به ازای یک نقطه $\theta=0,\theta=2\pi$ دو مقدار متفاوت دارد)، φ^* یکی ازهماهنگهای استوانه‌ای نیست.

۸-۲۶ - زاویهٔ میل مغناطیسی طبق تعریف عبارت است از زاویهٔ بین جهت میدان مغناطیسی زمین و صفحهٔ مماس بر سطح زمین در هر نقطه. رابطه‌ای برای زاویهٔ میل برحسب تابعی از عرض ژئومغناطیسی به دست آورید. فرض کنید میدان مغناطیسی زمین یک میدان دوقطبی باشد.

حل:



با توجه به شکل، برای زاویه میل مغناطیسی (α) می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\dfrac{\vec{B}.\vec{r}_e}{|\vec{B}||\vec{r}_e|}\\[2ex] \cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{\vec{B}.\vec{r}_e}{|\vec{B}||\vec{r}_e|}\qquad(1)$$

با توجه به فرض مسئله که میدان مغناطیسی زمین یک میدان دوقطبی است، داریم:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[-\frac{\vec{m}}{r_e^3}+\frac{3(\vec{m}.\vec{r}_e)\vec{r}_e}{r_e^5}\Big]$$

$$\vec{B}.\vec{r}_e=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[-\frac{\vec{m}.\vec{r}_e}{r_e^3}+\frac{3(\vec{m}.\vec{r}_e)(\vec{r}_e.\vec{r}_e)}{r_e^5}\Big]=\qquad(2)$$

و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{m}.\vec{r}_e=mr_e\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=mr_e\sin\theta$$

با جایگذاری این رابطه دررابطه (۲) داریم:

$$\vec{B}.\vec{r}_e=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\frac{-mr_e\sin\theta}{r_e^3}+\frac{3mr_e\sin\theta\, r_e^2}{r_e^5}\Big]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\frac{-m\sin\theta}{r_e^2}+\frac{3m\sin\theta}{r_e^2}\Big]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\sin\theta}{r_e^2}\qquad(3)$$

$$|\vec{B}|=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\frac{m^2}{r_e^6}+\frac{9m^2r_e^2\sin^2\theta\, r_e^2}{r_e^{10}}-\frac{2\times3(m.r_e)^2}{r_e^8}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m^2}{r_e^6}+\frac{9m^2\sin^2\theta}{r_e^6}-\frac{6m^2\sin^2\theta}{r_e^6}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r_e^3}\left[1+3\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

با جایگذاری روابط (۳)،(۴) در رابطه (۱)، برای زاویه میل داریم:

$$\sin\alpha=\frac{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\sin\theta}{r_e^2}}{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r_e^3}\left[1+3\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}r_e}=\frac{2\sin\theta}{\left[1+3\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}$$

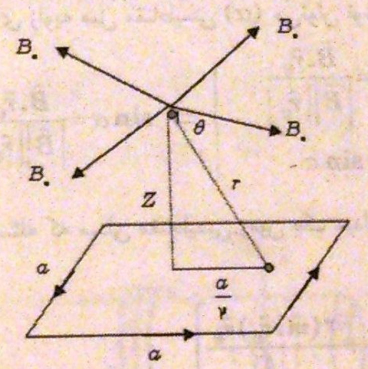
۸ - ۲۷ - یک مدار حامل جریان به شکل مربع (به ضلع a) در صفحهٔ xy قرار گرفته است (مبدأ مختصات در مرکز مربع و اضلاع آن موازی محورهای مختصات است). اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی B را (الف) در مرکز مربع، (ب) در نقطهٔ $(a/2,0,a/2)$، (ج) در نقطهٔ $(a,0,0)$ و (د) در نقطهٔ $(a/2,0,-a/2)$، محاسبه کنید.

حل:

میدان یک حلقه مربعی در نقطه ای بالای آن را با استفاده از میدان نزدیک سیم حامل جریان بدست می آوریم. حلقه را ۴ سیم مجزا در نظر می گیریم.

$$B(z)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad B_1=4B_0\cos\theta$$

با پیدا کردن میدان برای هر چهار سیم خواهیم داشت:



$$B(z)=\frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4z^2+a^2)(4z^2+2a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

حال بااعمال شرایط داده شده جواب حاصل می شود.

راهنمایی:

رابطه مطلوب مسئله در صفحه ۳۹۶ از کتاب نایفه به شکل زیر موجود است:

$$B=-\hat{\phi}\frac{\mu_0}{2\pi\rho}\left[\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+l^2}\,(L+\sqrt{L^2+\rho^2})}-1\right]$$

۸-۲۸- (الف) طرح دقیقی برای سطوح هم‌پتانسیل پتانسیل نرده‌ای یک دو قطبی مغناطیسی (در صفحهٔ $\phi=0$) رسم کنید. (ب) بعضی از خطوط میدان مغناطیسی را رسم کنید. (ب) جهت میدان مغناطیسی را بر حسب تابعی از r و θ تعیین کنید. (ج) r را بر حسب بستگی‌اش به θ برای یک خط به خصوص میدان مغناطیسی تعیین کنید.

حل:

(۱) پتانسیل نرده‌ای دو قطبی مغناطیسی

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\frac{m.r}{r^3}$$

$$\varphi=0\xrightarrow{\text{اگر } m \text{ در راستای محور } z \text{ ها باشد}}\varphi=\frac{1}{4\pi}\frac{mr\cos\theta}{r^3} \qquad (2)$$

$$=\frac{m}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$r^2=C\cos\theta=\frac{m}{4\pi\varphi_0}\cos\theta$$

$$J=0 \to B=-\mu_0\nabla\varphi=-\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}-\mu_0\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$$

$$\to B=-\mu_0\left(\frac{m}{4\pi}\frac{-2}{r^3}\cos\theta\right)\hat{r}$$

$$\to-\mu_0\left(\frac{m}{4\pi}\frac{-\sin\theta}{r^3}\right)\hat{\theta}=\frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r}+\frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right) \qquad (3)$$

اگر K یک ثابت نرده‌ای و S اندازه فاصله پازیک نقطه دلخواه روی خم می‌باشد پس

$$\hat{t}(r)=\frac{dr}{ds}=KB$$

$$\begin{cases}r=r\hat{r}(\theta)\to dr=\hat{r}dr+rd\hat{r}(\theta)\\ \hat{r}(\theta)=\hat{i}\sin\theta+\hat{k}\cos\theta\to d\hat{r}(\theta)\\ \quad=(\hat{i}\cos\theta-\hat{k}\sin\theta)d\theta=\hat{\theta}d\theta\end{cases}$$

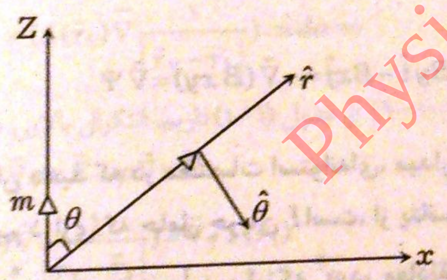
$$(4),(5)\to\hat{r}\frac{dr}{ds}+\hat{\theta}\frac{rd\theta}{ds}=k\hat{r}B_r+K\theta B_\theta \qquad (5)$$

$$\begin{cases}KB_r=\frac{dr}{ds}\\ KB_\theta=\frac{rd\theta}{ds}\to\frac{dr}{B_r}=\frac{rd\theta}{B_\theta}\end{cases} \qquad (6)$$

$$(3),(6)\to\frac{dr}{2\cos\theta}=\frac{rd\theta}{\sin\theta}\to\frac{dr}{r}=2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

از انتگرال‌گیری طرفین داریم:

$$Lnr=2\ln\sin\theta+Lnc_0\to r=C_0\sin^2\theta$$



۸ - ۲۹ - (الف) نشان دهید که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی برای نقطه‌ای واقع بر محور (محور z) یک حلقهٔ جریان دایروی به شعاع a، به صورت زیر است

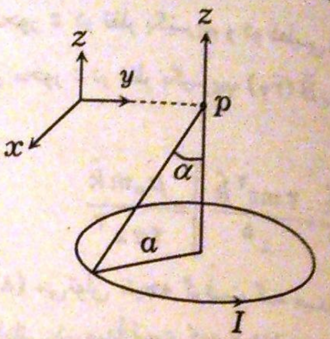
$$\varphi^*=\frac{1}{2}I\left\{1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right\}$$

(ب) با بسط دادن رابطهٔ بالا بر طبق قضیهٔ دو جمله‌ای، عبارتی رشته‌ای به دست آورید که برای ناحیهٔ $z<a$ صادق باشد. (ج) پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی φ^* باید در معادلهٔ لاپلاس صدق کند؛ به علت تقارن (r,θ) $\varphi^*=\varphi^*$، که در آن r فاصلهٔ مرکز حلقه تا نقطهٔ

Physicsclass.blogsky.com

...میان و θ زاویهٔ بین r و محور z است. نشان دهید که با استفاده از ...هارمونیک‌های منطقه‌ای، معادلهٔ (۳-۱۸)، می توان جوابی برای φ^* به دست آورد که قابل تبدیل به پتانسیل قسمت (ب) برای نقاط واقع بر محور تقارن باشد. (د) با استفاده از φ^* در قسمت (ج)، B_r و B_θ را در نقاط خارج از محور تقارن حلقه به دست آورید.

حل: الف)



می‌دانیم که پتانسیل نرده‌ای φ^* را برحسب Ω، زاویه فضایی در برگیرنده حلقه جریان از نقطه P، به صورت زیر است:

$$\varphi^*(P)=-\frac{I\Omega}{4\pi} \qquad (1)$$

برای محاسبه زاویه فضایی مورد نظر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\phi \Rightarrow$$

$$\Omega=\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi=2\pi(-\cos\theta)\Big|_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega=2\pi\left[1-\cos\alpha\right]\\ \text{با توجه به شکل}:\cos\alpha=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \Omega=2\pi\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

و با جایگذاری زاویه فضایی Ω در رابطه (۱)، پتانسیل نرده‌ای مطلوب حاصل می‌شود:

$$\varphi^*(P)=\frac{-I}{2}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

ب)

$$\varphi^*(P)=\frac{-I}{2}\left[1-z(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{-I}{2}\left[1-za^{-1}\left(\frac{z^2}{a^2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

و چون $z<a$ است، با توجه به بسط دو جمله‌ای داریم:

$$\varphi^*(P)=\frac{-I}{2}\left[1-za^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{z}{a}\right)^4+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{z}{a}\right)^6+\dots\right)\right]$$

$$=-\frac{I}{2}\left[1-\frac{z}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^3-\frac{3}{8}\left(\frac{z}{a}\right)^5+\frac{5}{18}\left(\frac{z}{a}\right)^7+\dots\right] \qquad (2)$$

ج)

$$J=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}=0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\nabla^2\varphi^*=0$$

در مختصات کروی:

$$\varphi^*(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi^*(r\to 0)\to\infty\Rightarrow B_n=0\ \forall n\Rightarrow$$

$$\varphi^*(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad (3)$$

برای نقاط واقع بر محور تقارن حلقه جریان پتانسیل نرده‌ای به صورت زیر است:

$$\varphi^*(r=z,\theta=0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n P_n(1)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n$$

$$=A_0\left(1+\frac{A_1}{A_0}z+\frac{A_2}{A_0}z^2+\frac{A_3}{A_0}z^3+\dots\right) \qquad (4)$$

از مقایسه روابط (۱)،(۴) می‌توان ضرایب ثابت A_n ها را بدست آورد:

$$A_0=-\frac{I}{2}\ ,\ \frac{A_1}{A_0}=-\frac{1}{a}\Rightarrow A_1=-\frac{1}{a}\left(-\frac{I}{2}\right)=\frac{I}{2a}$$

$$\frac{A_2}{A_0}=0\Rightarrow A_2=0\ ,\ \frac{A_3}{A_0}=\frac{1}{2a^3}\Rightarrow$$

$$A_3=\frac{1}{2a^3}\left(-\frac{I}{2}\right)=\frac{-I}{4a^3}\ ,\ \dots$$

با جایگذاری ضرایب حاصل در رابطه (۳)، پتانسیل نرده‌ای φ^* به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varphi^*(r,\theta)=-\frac{I}{2}\left[1-\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3P_3(\cos\theta)-\frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^5P_5(\cos\theta)+\dots\right]$$

ج)

$$\vec{B}=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^*$$

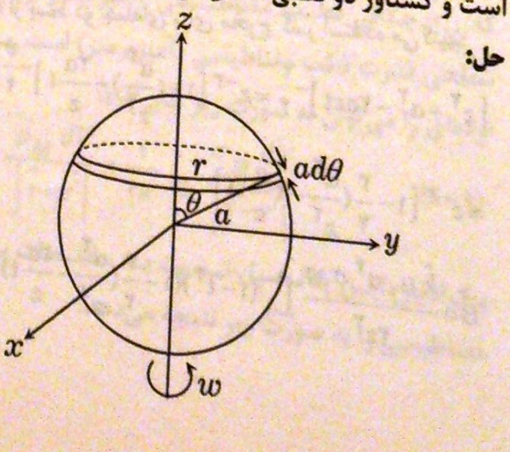
$$B_r=-\mu_0\frac{\partial}{\partial r}\varphi^*=+\frac{\mu_0 I}{2a}\left[-P_1(\cos\theta)+\frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2P_3(\cos\theta)+\dots\right]$$

$$B_\theta=-\mu_0\frac{\partial}{r\partial\theta}\varphi^*$$

$$=+\frac{\mu_0 I}{2a}\left[\sin\theta+\frac{3}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(-5\cos^2\theta+1\right)\sin\theta+\dots\right]$$

۸ - ۳۰ - کره‌ای به شعاع a را که چگالی بار سطحی آن σ است (بار محکم به کره متصل است) حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای ثابت w می‌چرخانیم. نشان دهید که میدان مغناطیسی در یک نقطهٔ خارج از آن به صورت یک میدان دو قطبی است و گشتاور دو قطبی معادل آن را حساب کنید.

حل:



مانند شکل المان باریکی به شعاع r را که حامل جریان dI است، بین زوایای $\theta+d\theta,\theta$ در نظر می‌گیریم مقدار جریان dI این المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$dI=\frac{dQ}{dt} \qquad (۱)$$

$$dQ=\sigma\times dA\ (\text{نوار باریک})=\sigma\times(2\pi r a d\theta)$$

و با توجه به شکل می‌توان شعاع حلقه مفروض را به صورت زیر نوشت:

$$r=a\sin\theta \Rightarrow dQ=\sigma 2\pi(a\sin\theta)a\,d\theta$$

$$=\sigma 2\pi a^2\sin\theta\,d\theta \qquad (۲)$$

$$dt=\frac{2\pi}{w}\ (\text{دوره تناوب دوران کره}) \qquad (۳)$$

با جایگذاری روابط (۲)،(۳) در رابطه (۱)، برای جریان dI داریم:

$$dI=\frac{\sigma 2\pi a^2\sin\theta\,d\theta}{(\frac{2\pi}{w})}=\sigma w a^2\sin\theta\,d\theta \qquad (۴)$$

می‌دانیم که میدان مغناطیسی حاصل از این حلقه جریان مفروض به شعاع r و جریان dI در فاصله R از مرکز آن و بر روی محور آن به صورت زیر است:

$$d\vec{B}(R)=\frac{\mu_0 r^2 dI}{2(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \qquad (۵)$$

و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$r=a\sin\theta\ ,\ R=Z-a\cos\theta$$

$$r^2+R^2=a^2\sin^2\theta+z^2+a^2\cos^2\theta$$

$$-2az\cos\theta=z^2+a^2-2az\cos\theta \qquad (۶)$$

با جایگذاری روابط (۴)،(۶) در رابطه (۵) داریم:

$$d\vec{B}(R)=\frac{\mu_0}{2}\frac{a^2\sin^2\theta(\sigma w a^2\sin\theta)d\theta}{(z^2+a^2-2az\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$=\frac{\mu_0 a^4\sigma w}{2}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{(z^2+a^2-2az\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 a^4\sigma w}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{(z^2+a^2-2az\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

با تغییر متغیر ($t=\cos\theta$)، انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$t=\cos\theta \Rightarrow dt=-\sin\theta\,d\theta\ ,\ \sin^2\theta=1-t^2$$

$$\int_1^{-1}\frac{(1-t^2)(-dt)}{(z^2+a^2-2azt)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)dt}{(z^2+a^2-2azt)^{\frac{3}{2}}}$$

و چون $z>a$ است از بسط دو جمله‌ای برای مخرج کسر استفاده می‌کنیم:

$$[z^2+a^2-2azt]^{-\frac{3}{2}}=z^{-3}\left[1+(\frac{a^2}{z^2})-\frac{2a}{z}t\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\approx z^{-3}\left[1-\frac{3}{2}(\frac{a^2}{z^2}-2\frac{a}{z}t)\right]$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{k}\mu_0 a^4\sigma w}{2z^3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)(1-\frac{3}{2}(\frac{a^2}{z^2}-\frac{2a}{z}t))dt$$

$$=\frac{\hat{k}\mu_0 a^4\sigma w}{2z^3}\left[\frac{4}{3}-3(\frac{a}{z})^2\right]\approx\frac{2\mu_0 a^4\sigma w}{3z^3}\hat{k} \qquad (۷)$$

می‌دانیم میدان مغناطیسی حاصل از یک دو قطبی به صورت زیر است:

$$\vec{B}(\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r_2^3}+\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_2)\vec{r}_2}{r_2^5}\right]$$

اگر نقطه $\vec{r}_2$ را روی محور z در نظر بگیریم و دو قطبی $\vec{m}$ را نیز در مبدأ مختصات و در راستای محور z در نظر بگیریم، $\vec{B}(\vec{r}_2)$ به صورت زیر در می‌آید:

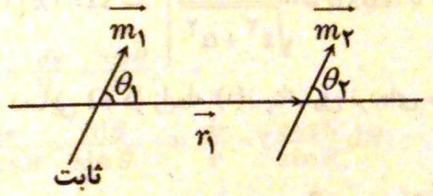
$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{m\hat{k}}{z^3}+\frac{3mz^2\hat{k}}{z^5}\right]=\frac{\mu_0 m\hat{k}}{4\pi z^3} \qquad (۸)$$

با مقایسه روابط (۷)،(۸) می‌توان نتیجه گرفت که میدان $\vec{B}$ حاصل به صورت میدان یک دو قطبی در مبدأ است که گشتاور دو قطبی معادل آن برابر است با:

$$\vec{m}=\frac{4\pi}{3}\sigma w a^4$$

۸ – ۳۱ - دو دوقطبی m_1 و m_2 در یک صفحه قرار دارند؛ m_1 ثابت است ولی m_2 می‌تواند حول مرکز خود بچرخد. نشان دهید که در حالت تعادل $\tan\theta_1=-2\tan\theta_2$ که در آن θ_1 و θ_2 به ترتیب عبارت‌اند از زاویه‌های بین r و دوقطبیهای m_1 و m_2 (r بردار جابه‌جایی بین m_1 و m_2 است).

حل:



چون $\vec{m}_1$ ثابت است و $\vec{m}_2$ حول مرکز خود می‌چرخد، در حالت تعادل داریم:

$$\vec{\tau}=\vec{m}_2\times\vec{B}_1=0$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}_1}{r^3}+\frac{3\vec{m}_1\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}\right]$$

$$\vec{\tau}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}_2\times\vec{m}_1}{r^3}+\frac{3(\vec{m}_1\cdot\vec{r})}{r^5}(\vec{m}_2\times\vec{r})\right]=0$$

$$\vec{m}_1\cdot\vec{r}=m_1 r\cos\theta_1$$

$$\vec{m}_2\times\vec{r}=m_2 r\sin\theta_2$$

$$\vec{m}_2\times\vec{m}_1=m_1 m_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$\tau=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{m_1 m_2\sin(\theta_2-\theta_1)}{r^3}+\frac{3(m_1 r\cos\theta_1)m_2 r\sin\theta_2}{r^5}\right]=0$$

$$\Rightarrow\sin(\theta_2-\theta_1)=3\cos\theta_1\sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2\cos\theta_1$$

$$-\sin\theta_1\cos\theta_2=3\cos\theta_1\sin\theta_2 \Rightarrow -\tan\theta_1=2\tan\theta_2$$

Physicsclass.blogsky.com

۹

خواص مغناطیسی ماده

تمام مواد نهایتاً از اتمها ساخته شده‌اند، و هر اتم شامل الکترونهای در حال حرکت است. این مدارهای الکترونی، که هر کدام به یک اتم تنها محدودند، جریانهای اتمی نام دارند. پس ظاهراً دو نوع جریان وجود دارد: (۱) جریان متعارف که از انتقال بار، یعنی حرکت الکترونهای آزاد یا یونهای باردار به وجود می‌آید، (۲) جریان‌های اتمی که جریان‌های کاملاً دورانی‌اند و به انتقال بار منجر نمی‌شوند. اما هر دو نوع جریان می‌توانند میدان مغناطیسی تولید کنند.

مغناطش

هر جریان اتمی مدار کوچک بسته‌ای به ابعاد اتمی است بنابراین می‌توان میدان مغناطیسی اتم را در دوردست به صورت یک میدان دوقطبی مغناطیسی توصیف کرد. اگر تمام گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی واقع در عنصر کوچک حجم ΔV را با هم جمع‌برداری کرده و سپس نتیجه را بر ΔV تقسیم کنیم، کمیت حاصل یعنی:

$$M=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_i m_i \qquad (۹-۱)$$

گشتاور دو قطبی مغناطیسی در واحد حجم (مغناطش) حاصل می‌شود.

کمیت M یک تابع برداری نقطه‌ای خواهد بود. در حالتی که ماده نامغناطیده است، چون جهت m_i ها کاتوره‌ای است، مجموعه $\sum_i m_i$ صفر می‌شود، اما در صورت وجود یک میدان برانگیزندهٔ خارجی، معمولاً M به این میدان بستگی دارد.

در این بخش $M(x,y,z)$ تابعی معلوم فرض می‌شود. تمام اثرهای مغناطیسی مربوط به ماده را می‌توان به طوری مناسب بر حسب M یا مشتقهای آن بیان کرد. یکی از این مشتقها، یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{M}$، معادل است با یک چگالی جریان انتقالی که بتواند همان میدان مغناطیسی ایجاد شده بوسیلهٔ خود M را بوجود آورد:

$$\vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M} \qquad (۹-۲)$$

این بردار را چگالی جریان مغناطیس $\vec{J}_M$ می‌نامند.

چگالی سطحی جریان مغناطیس $\vec{j}_M$ (یعنی، جریان مغناطیش در واحد طول که در لایهٔ سطحی جاری است) با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\vec{j}_M=\vec{M}\times\hat{n} \qquad (۹-۳)$$

میدان مغناطیسی ناشی از مادهٔ مغناطیده

پتانسیل برداری ناشی از یک مادهٔ مغناطیده به صورت زیر است:

$$\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\vec{J}_M(r')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\vec{j}_M\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (۹-۴)$$

وپتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی از مادهٔ مغناطیسی به صورت زیر است:

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\vec{M}(r')\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' \qquad (۹-۵)$$

و میدان مغناطیسی ناشی از یک توزیع مادهٔ مغناطیده را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت: گرادیان یک میدان نرده‌ای به اضافهٔ جمله‌ای متناسب با مغناطش موضعی.

$$\vec{B}(r)=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^*(r)+\mu_0 M(r) \qquad (۹-۶)$$

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی و چگالی قطب مغناطیسی

معادلهٔ (۹-۵) را می‌توان با تبدیل ریاضی به صورت زیر نوشت:

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\frac{\vec{M}\cdot\hat{n}\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \qquad (۹-۷)$$

که S_0 سطح ناحیهٔ V_0 است. کمیتهای نرده‌ای داخل انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_M(r')=-\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(r)\ ,\quad \sigma_M(r')=\vec{M}(r')\cdot\hat{n} \qquad (۹-۸)$$

که ρ_M چگالی قطب مغناطیسی (آمپربرمترمربع) و σ_M، چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی (آمپربرمتر) است. بنابراین پتانسیل نرده‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\rho_M\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (۹-۹)$$

و گرادیان این پتانسیل نسبت به مختصات بی‌پریم، میدان مغناطیسی را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

Physicsclass.blogsky.com

(۹-۱۰)

$$\vec{B}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\rho_M\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S_0}\sigma_M\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}da'+\mu_0\vec M(r)$$

این رابطه سهم مادهٔ مغناطیده در حجم V_0 را در ایجاد میدان مغناطیسی در نقطهٔ (x,y,z) نشان می‌دهد.

چشمه‌های میدان مغناطیسی:

در حالت کلی دو نوع چشمهٔ مغناطیسی وجود دارد: جریان‌های متعارف یا جریان‌های انتقالی و جریان‌های اتمی در ماده. یک قطعه از ماده تحت شرایط خاصی می‌تواند هم به این علت که مغناطیده است و هم به این علت که دارای جریانی انتقالی از حامل‌های بار است، میدان مغناطیسی تولید کند. به طور کلی، میدان مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۹-۱۱)

$$\vec B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec J\times(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}dV'-\mu_0\vec\nabla\varphi^*(r)+\mu_0\vec M(r)$$

که:

(۹-۱۲)

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_M\,dV'}{|\vec r-\vec r'|}+\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec r-\vec r'|}$$

حجم V تمام نواحی حامل جریان و تمام ماده را دربر می‌گیرد. سطح S شامل تمام سطوح و فصل مشترکهای بین محیطهای مختلف است. چگالی جریان $\vec J$ تنها شامل جریانهای متعارف از نوع انتقال بار است، در حالی که اثر جریانهای اتمی در بردار مغناطش $\vec M$ و پتانسیل φ^* یافت می‌شود.

معادلات میدان

با توجه به شکل دیفرانسیلی قانون مداری آمپر میدان مغناطیسی کل ناشی از جریانهای انتقالی پایا به اضافهٔ جریانهای مغناطش در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

(۹-۱۳)

$$\vec\nabla\times\vec B=\mu_0(\vec J+\vec J_M)$$

و با توجه به معادلهٔ (۹-۲) داریم:

(۹-۱۴)

$$\vec\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec B-\vec M\right)=\vec J$$

با تعریف میدان برداری $\vec H$ به صورت زیر:

(۹-۱۵)

$$\vec H=\frac{1}{\mu_0}\vec B-\vec M\Rightarrow\vec\nabla\times\vec H=\vec J$$

یعنی، بردار مغناطیسی کمکی $\vec H$ از طریق تاو خود به چگالی جریان انتقالی مربوط می‌شود.

با استفاده از قضیهٔ استوکس می‌توان معادلهٔ (۹-۱۵) را به صورت زیر تبدیل کرد:

(۹-۱۶)

$$\oint_C\vec H.\vec{dl}=I$$

در واقع انتگرال خطی مؤلفهٔ مماسی شدت مغناطیسی دور مسیر بستهٔ C برابر است با کل جریانهای انتقالی که از سطح محصور شده توسط منحنی C می‌گذرند.

پذیرفتاری، تراوایی مغناطیسی و پسماند

در بسیاری از مواد یک رابطهٔ تقریباً خطی بین M و H وجود دارد. اگر ماده همسانگرد و در عین حال خطی باشد، خواهیم داشت

(۹-۱۷)

$$\vec M=\chi_m\vec H$$

که در آن کمیت نرده‌ای و بی‌بعد χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی می‌نامند. وقتی این معادله را با تعریف H ترکیب کنیم، رابطهٔ زیر را بدست می‌آوریم:

(۹-۱۸)

$$\vec B=\mu(H)\vec H$$

که در آن تراوایی مغناطیسی μ برابر است با:

(۹-۱۹)

$$\mu=\mu_0[1+\chi_m(H)]$$

گاهی اوقات کمیت بی‌بعد زیر را به جای χ_m در جدولها ذکر می‌کنند:

(۹-۲۰)

$$k_m=\frac{\mu}{\mu_0}=1+\chi_m$$

این کمیت را تراوایی نسبی می‌نامند.

اگر χ_m مثبت باشد، ماده را پارامغناطیس می‌گویند و میدان مغناطیسی در اثر حضور ماده تقویت می‌شود. اگر χ_m منفی باشد، ماده را دیامغناطیس می‌نامند و میدان مغناطیسی در اثر حضور چنین ماده‌ای تضعیف می‌شود. با اینکه χ_m تابعی از دماست و گاهی نیز به شدت با دما تغییر می‌کند. عموماً با اطمینان می‌توان گفت که χ_m برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس بسیار کوچک است:

$$|\chi_m|<<1$$

مواد مغناطیسی که اهمیت عملی دارند فرومغناطیسی‌اند، برای این مواد $|\chi_m|$ ممکن است بیش از ۱۰۰۰ باشد، ولی $\vec B=B(H)$ نه خطی است و نه حتی تک مقدار (پسماند).

پذیرفتاری جرمی $\chi_{m\,\text{جرمی}}$ و پذیرفتاری مولی $\chi_{m\,\text{مولی}}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۹-۲۱)

$$\chi_m=\chi_{m\,\text{جرمی}}\,d\quad,\quad\chi_m=\chi_{m\,\text{مولی}}\frac{d}{A}$$

که در آن d چگالی جرمی ماده و A وزن مولکولی آن است. واضح است که $\chi_{m\,\text{جرمی}}H$ و $\chi_{m\,\text{مولی}}H$ به ترتیب گشتاور مغناطیسی در واحد جرم و گشتاور مغناطیسی در مول را مشخص می‌کنند.

شرایط مرزی برای بردارهای میدان

با استفاده از رابطهٔ (۹-۱۸) همراه با معادلات دیفرانسیل زیر

(۹-۲۲)

$$\vec\nabla.\vec B=0\quad,\quad\vec\nabla\times\vec H=\vec J$$

می‌توان $\vec B$ و $\vec H$ را تعیین کرد، که البته باید تابع شرایط مرزی زیر باشند:

(۹-۲۳)

$$B_{2n}-B_{1n}=0$$

در واقع مؤلفهٔ قائم $\vec B$ در عبور از فصل مشترک پیوسته است.

(۹-۲۴)

$$H_{2t}-H_{1t}=\vec j\times\hat n_2$$

Physicsclass.blogsky.com

که در آن $\vec{j}$ چگالی جریان سطحی است (جریان انتقالی در واحد طول در لایهٔ سطحی). در واقع مؤلفهٔ مماسی شدت مغناطیسی در عبور از یک فصل مشترک پیوسته است، مگر اینکه یک جریان سطحی واقعی وجود داشته باشد.

می‌توان ثابت کرد که شارمغناطیسی B در همه جا پیوسته است. در واقع خطوط شار هرگز به جایی ختم نمی‌شوند. بلکه باید سرانجام به خودشان ملحق شوند و حلقه‌های بسته‌ای تشکیل دهند. این حکم در مورد میدان H صادق نیست، زیرا $\vec{\nabla}.\vec{H}=-\vec{\nabla}.\vec{M}$ که در همه جا صفر نیست و با به کاربردن قضیهٔ دیورژانس در مورد لوله‌ای از شدت مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\int_{S_2}\vec{H}.\hat{n}\,da-\int_{S_1}\vec{H}.\hat{n}'\,da=\int_V \rho_M\,dV \qquad (۹-۲۵)$$

بنابراین ناپیوستگی در شار شدت مغناطیسی برابر است با کل قدرت قطب مغناطیسی که درون لولهٔ شار واقع است.

مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی

در مسائلی که جریان‌های انتقالی ندارند، از آنجا که $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0$ است، استفاده از پتانسیل نرده‌ای مناسب است.

$$\vec{H}=-\vec{\nabla}\varphi^* \qquad (۹-۲۶)$$

چون $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}.\vec{H}=-\vec{\nabla}.\vec{M}$ بنابراین φ^* در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند

$$\nabla^2\varphi^*=\vec{\nabla}.\vec{M} \qquad (۹-۲۷)$$

یک پاسخ این معادله به صورت زیر است:

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\rho_M(r')\,dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}+\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\sigma_M(r')\,dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \qquad (۹-۲۸)$$

این پاسخ در صورتی قابل استفاده است که $\vec{M}$ تابعی معلوم باشد.

در مسائلی که در آنها محیط خطی یا $\vec{M}$ یکنواخت باشد، $\vec{\nabla}.\vec{H}=0$، φ^* در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. بنابراین مسئلهٔ مغناطیس تبدیل می‌شود به مسئلهٔ یافتن جوابی برای معادلهٔ لاپلاس که در شرایط مرزی صدق کند. آنگاه $\vec{H}$ را می‌توان با محاسبهٔ منفی‌گرایان پتانسیل مغناطیسی به دست آورد و $\vec{B}$ را از رابطهٔ:

$$\vec{B}=\mu\vec{H} \quad \text{یا} \quad \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \qquad (۹-۲۹)$$

هرکدام که مناسب مسئلهٔ ما باشد، به دست می‌آید.

کرهٔ تراوای مغناطیسی در میدان مغناطیسی یکنواخت

کره‌ای از جنس یک مادهٔ مغناطیسی خطی به شعاع a و تراوایی μ را در یک ناحیه‌ای از فضا که حاوی یک میدان مغناطیسی $\vec{B}_0$ (در آغاز یکنواخت بوده) است، در نظر می‌گیریم. با انتخاب مبدأء مختصات در مرکز کره و جهت $\vec{B}_0$ به عنوان جهت قطبی (جهت Z) می‌توان پتانسیل را به صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت و با اعمال شرایط مرزی حاکم بر مسئله میدانهای مغناطیسی در داخل و خارج از کره به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\vec{B}_1=B_0\hat{k}+\left[\frac{(\frac{\mu}{\mu_0})-1}{(\frac{\mu}{\mu_0})+2}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0(2\cos\theta\,\hat{r}_0+\sin\theta\,\hat{\theta}_0) \qquad (۹-۳۰)$$

$$\vec{B}_2=\frac{3B_0}{1+2(\frac{\mu_0}{\mu})}\hat{k} \qquad (۹-۳۱)$$

میدان کرهٔ مغناطیدهٔ یکنواخت

کره‌ای به شعاع a که به طور یکنواخت مغناطیده (با بردار مغناطش $\vec{M}$) است در نظر می‌گیریم. اگر بردار مغناطش را در امتداد محور Z و مبدأ مختصات را درمرکز کره اختیار کنیم می‌توان پتانسیل را برحسب هماهنگهای منطقه‌ای بسط داد. و با استفاده از شرایط مرزی حاکم می‌توان نتایج زیر را برای خارج و داخل کره بدست آورد.

$$\varphi_1^*(r,\theta)=\frac{1}{3}M\left(\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (۹-۳۲)$$

$$\vec{H}_1=\frac{1}{3}M\left(\frac{a^3}{r^3}\right)\left[2\cos\theta\,\hat{r}_0+\sin\theta\,\hat{\theta}_0\right]$$

$$\varphi_2^*(r,\theta)=\frac{1}{3}Mr\cos\theta \qquad (۹-۳۳)$$

$$\vec{H}_2=-\frac{1}{3}M\hat{k}$$

بنابراین میدان خارجی کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است، دقیقاً یک میدان دو قطبی است که از گشتاور دوقطبی $\frac{4}{3}\pi a^3 M$ نتیجه می‌شود. شدت مغناطیسی داخل کره میدانی وامغناطنده است، در واقع کرهٔ مغناطیده تحت تأثیر میدان وامغناطندهٔ خود قرار می‌گیرد.

مدارهای جریان شامل محیط‌های مغناطیسی

سیم‌پیچ چنبره‌ای با N دور یکنواخت که جریان I از آن می‌گذرد را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم ناحیهٔ داخل سیم‌پیچ با یک مادهٔ فرومغناطیسی پرشده که همگن و همسانگرد بوده و در آغاز مغناطیده نباشد. با استفاده از معادلهٔ (۹-) در یک مسیر دایره‌ای که با سوراخ درون چنبره هم محور است. (تقارن مسئله حکم می‌کند که H در تمام نقاط واقع برمسیر یکسان باشد)، میدان مغناطیسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H=\frac{NI}{l} \quad , \quad B=\frac{\mu_0 NI}{l}+\mu_0 M \qquad (۹-۳۴)$$

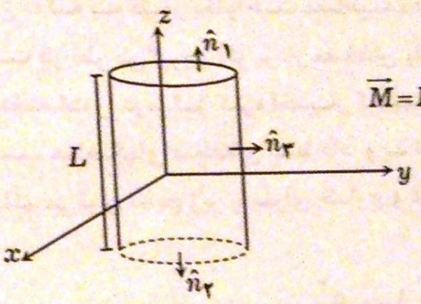
بنابراین میدان مغناطیسی با حالتی که در خلاء داشتیم به اندازهٔ جملهٔ اضافی $\mu_0 M$ تفاوت دارد.

Physicsclass.blogsky.com

مسائل فصل نهم

۹-۱- یک آهنربای دائمی به شکل استوانهٔ قائم به طول L مفروض است. مغناطش M یکنواخت و در جهت محور استوانه است. (الف) چگالیهای جریان مغناطش J_M ، j_M را پیدا کنید. (ب) این توزیع جریان را با توزیع جریان در یک سیملوله مقایسه کنید.

حل: الف)



الف)

$$\vec{M}=M_\circ\hat{k} \Rightarrow \vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$$

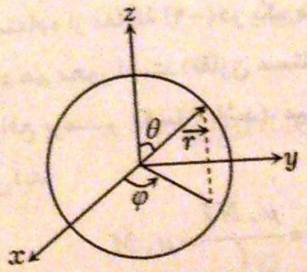
$$\vec{j}=\vec{M}\times\hat{n} \Rightarrow \begin{cases}\vec{j}_1=\vec{M}\times\hat{n}_1=0\\ \vec{j}_2=\vec{M}\times\vec{n}_2=0\\ \vec{j}_3=\vec{M}\times\vec{n}_3=M_\circ\hat{k}\times\hat{r}_\circ=M_\circ\hat{\varphi}_\circ\end{cases}$$

ب) چون تنها در سطح جانبی جریان وجود دارد، بنابراین این استوانهٔ مغناطیده معادل است با سیملوله‌ای به طول L و N دور سیم که حامل جریان متعارف زیر باشد.

$$\frac{NI}{L}=M_\circ \Rightarrow I=\frac{LM_\circ}{N}$$

۹- ۲- (الف) توزیع جریانهای مغناطش را برای کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شد و بردار مغناطش آن M است، به دست آورید. بر طبق معادلهٔ (۹-۶۳) میدان مغناطیسی B در داخل چنین کره‌ای یکنواخت است. (ب) آیا می توانید با استفاده از این اطلاعات یک سیم پیچ جریان طراحی کنید به طوری که در یک فضای کروی میدان مغناطیسی یکنواخت ایجاد کند؟

حل: الف)



$$\vec{M}=M_\circ\hat{k} \Rightarrow \vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$$

$$\vec{j}_M=\vec{M}\times\hat{n}=M_\circ\hat{k}\times\hat{r}_\circ=\mu_\circ\sin\theta\hat{\varphi}_\circ \qquad (1)$$

ب) با فرض باریکنواختی به چگالی σ بر روی سطح کره‌ای به شعاع r که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور Z می‌چرخد، می‌توان چگالی جریان سطحی برای این کره به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{J}=\sigma\vec{V}=\sigma\vec{\omega}\times\vec{r}=\sigma\omega r\sin\theta\hat{\varphi}_\circ \qquad (2)$$

از همانند بودن روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که میدان مغناطیسی داخل چنین کره‌ای مانند میدان حاصل از کره‌ای با $\vec{M}$ یکنواخت، یکنواخت خواهد بود.

۹- ۳- (الف) گشتاور مغناطیسی یک جسم ماکروسکوپی به صورت $\int_v M\,dv$ تعریف می‌شود. رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\int_v M\,dv=\int_v r\rho_M\,dv+\oint_s r\sigma_M\,da$$

که در این رابطه S سطحی است که حجم V را در برمی‌گیرد. (راهنمایی: به مسئلهٔ مشابه مربوط به P در فصل ۴ مراجعه کنید.). (ب) یک آهنربای دائمی به شکل کره و به شعاع R دارای بردارمغناطش یکنواخت $M_\circ$ در امتداد محور قطبی است. گشتاور مغناطیسی این آهنربا را هم از سمت راست و هم از سمت چپ معادلهٔ قسمت (الف) پیدا کنید.

حل: الف) ابتدا برای مؤلفهٔ x اثبات را انجام می‌دهیم:

با استفاده از قضیهٔ واگرایی برای بردار $x\vec{M}$ داریم:

$$\oint_s x\vec{M}.\hat{n}\,da=\int_V\vec{\nabla}.(x\vec{M})dV=\int_V(\vec{\nabla}x.\vec{M}+x\vec{\nabla}.\vec{M})dV$$

$$\oint_s x\vec{M}.\hat{n}\,da=\int_V M_x\,dV-\int_V x\rho_M\,dV$$

$$\Rightarrow \oint_s x\sigma_M\,da+\int_V x\rho_M\,dV=\int_V M_x\,dV \qquad (1)$$

به همین ترتیب می‌توان برای دو مؤلفهٔ دیگر به صورت زیر بدست آورد:

$$\oint_s y\sigma_M\,da+\int_V y\rho_M\,dV=\int_V M_y\,dV \qquad (2)$$

$$\oint_s Z\sigma_M\,da+\int_V Z\rho_M\,dV=\int_V M_Z\,dV \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \oint_s \vec{r}\sigma_M\,da+\int_V\vec{r}\rho_M\,dV=\int_V\vec{M}\,dV$$

ب)

$$\vec{m}=\int_V\vec{M}\,dV=\int_V M_\circ\hat{k}\,dV=$$

$$M_\circ\hat{k}\int_V dV=M_\circ\hat{k}(\frac{4}{3}\pi R^3)=\frac{4}{3}\pi R^3 M_\circ\hat{k}$$

و برای سمت دیگر تساوی:

$$\sigma_M=\vec{M}.\hat{n}=M_\circ\hat{k}.\hat{n}=M_\circ\hat{k}.\hat{r}_\circ=M_\circ\cos\theta$$

$$\vec{M}=M_\circ\hat{k}\rightarrow\rho_M=\vec{\nabla}.\vec{M}=0$$

$$\vec{m}=\oint_s\vec{r}\sigma_M\,da=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(R\hat{r}_\circ)(M_\circ\cos\theta)R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$M_\circ R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\hat{r}_\circ\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=M_\circ R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\hat{j}+\cos\theta\hat{k})$$

$$\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

با توجه به اینکه دو انتگرال اول صفر می‌شوند، داریم:

$$\vec{m}=M_\circ R^3\hat{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$2\pi M_\circ R^3\hat{k}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=2\pi M_\circ R^3\hat{k}(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi})=\frac{4}{3}\pi R^3 M_\circ\hat{k}$$

Physicsclass.blogsky.com

۹-۴- (الف) آهنربایی را با بردار مغناطش مشخص $M(x,y,z)$ در نظر بگیرید. هر جزء حجم dv را می‌توان یک دو قطبی مغناطیسی کوچک $M\,dv$ فرض کرد. اگر آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $B_\circ$ قرار دهیم، گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را بر حسب گشتاور مغناطیسی آن (که در مسئلهٔ ۳-۹ تعریف شده است) پیدا کنید. (ب) آهنربایی به شکل استوانهٔ قائم به طول L و سطح مقطع A به طور یکنواخت در امتداد موازی با محور استوانه، مغناطیده است و بردار مغناطش آن $M_\circ$ است. آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $B_\circ$ قرار می‌دهیم. گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را بر حسب چگالیهای قطب مغناطیسی آن محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\vec{M}=\vec{M}(x,y,z) \quad , \quad d\vec{m}=\vec{M}\,dV$$

می‌دانیم که گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی $\vec{m}$ در میدان یکنواخت $\vec{B}_\circ$ برابر است با:

$$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}_\circ$$

بنابراین برای دو قطبی مغناطیسی $d\vec{m}$ داریم:

$$d\vec{\tau}=d\vec{m}\times\vec{B}_\circ \to \vec{\tau}=\int_V d\vec{m}\times\vec{B}_\circ=$$

$$\int_V \vec{M}\,dV\times\vec{B}_\circ=\left[\int_V \vec{M}\,dV\right]\times\vec{B}_\circ$$

$$\to \vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}_\circ$$

ب) با توجه به نتیجهٔ قسمت الف، گشتاور نیروی وارد بر آهنربا در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}_\circ$ برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}_\circ\\ \vec{m}=\int_V \vec{M}\,dV\\ \vec{M}=M_\circ\hat{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\tau}=\left[\int_V \vec{M}\,dV\right]\times\vec{B}_\circ=M_\circ AL\hat{k}\times\vec{B}_\circ \quad (1)$$

$$\sigma_M=\vec{M}\cdot\hat{n}\to\begin{cases}\sigma_{M_1}=M_\circ\hat{k}\cdot\hat{k}=M_\circ & \text{قاعدهٔ بالایی}\\ \sigma_{M_2}=\circ & \text{سطح جانبی}\\ \sigma_{M_3}=-M_\circ & \text{قاعدهٔ پایینی}\end{cases}$$

$$\vec{M}=M_\circ\hat{k}\to\rho_M=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=\circ$$

$$\vec{m}=\int_V \vec{r}\rho_M\,dV+\oint_S \vec{r}\sigma_M\,da=\circ+\frac{L}{2}\hat{k}M_\circ A+(-\frac{L}{2}\hat{k})(-M_\circ)A$$

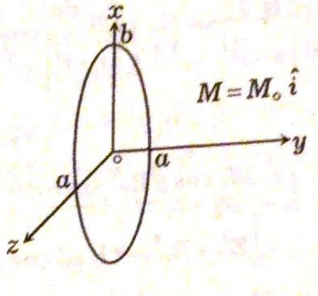
$$=LM_\circ A\hat{k}=\sigma_{M_1}LA\hat{k}$$

بنابراین:

$$\vec{\tau}=M_\circ AL\hat{k}\times\vec{B}_\circ=\sigma_{M_1}AL\hat{k}\times\vec{B}_\circ$$

۹-۵- بیضیواری که طول محورهای اصلی آن ۲a، ۲a و ۲b است، به طور یکنواخت در امتداد موازی با محور ۲b مغناطیده است. بردار مغناطش بیضیوار $M_\circ$ است. چگالیهای قطب مغناطیسی را برای این شکل هندسی پیدا کنید.

حل:



$$M=M_\circ\hat{i} \to \rho_M=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=\circ$$

$$\sigma_M=\vec{M}\cdot\hat{n}$$

برای هر سطح در فضا بردار یکهٔ عمود بر آن را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\varphi(x,y,z)=C \to \hat{n}=\frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}$$

بنابراین برای سطح بیضی‌وار مفروض داریم:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \to \vec{\nabla}\varphi=\frac{2x}{b^2}\hat{i}+\frac{2y}{a^2}\hat{j}+\frac{2z}{a^2}\hat{k}$$

$$|\vec{\nabla}\varphi|=\left[\frac{4x^2}{b^4}+\frac{4y^2}{a^4}+\frac{4z^2}{a^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

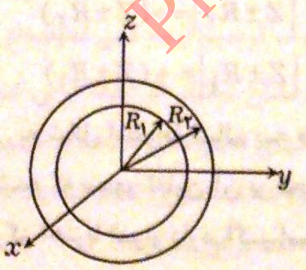
$$\to \sigma_M=\vec{M}\cdot\hat{n}=M_\circ\hat{i}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}\right)=$$

$$M_\circ\frac{\frac{2x}{b^2}}{\left[\frac{4x^2}{b^4}+\frac{4y^2}{a^4}+\frac{4z^2}{a^4}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{M_\circ x}{\left[x^2+\frac{b^4}{a^4}(y^2+z^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

۹-۶- یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 در امتداد محور z به طور یکنواخت مغناطیده است. بردار مغناطش در پوسته برابر $M_\circ=M_\circ\hat{k}$ است. پتانسیل نرده‌ای φ^* را برای نقاط واقع بر محور z در داخل و خارج پوسته به دست آورید.

حل:

$$\vec{M}=M_\circ\hat{k}$$



$$\vec{M}=M_\circ\hat{k}\to\rho_M=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=\circ$$

$$\sigma_M=\vec{M}\cdot\hat{n}\to$$

$$\begin{cases}\sigma_M=\vec{M}\cdot\hat{r}_\circ=M_\circ\hat{k}\cdot\hat{r}_\circ=M_\circ\cos\theta & \text{روی سطح خارجی}\\ \sigma_M=\vec{M}\cdot(-\hat{r}_\circ)=M_\circ\hat{k}\cdot(-\hat{r}_\circ)=-M_\circ\cos\theta & \text{روی سطح داخلی}\end{cases}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_M\,dV'}{|\vec r-\vec r'|}+\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$\vec r=Z\hat k\quad,\quad \vec r'_1=R_1\hat r_\circ\quad,\quad \vec r'_2=R_2\hat r_\circ$$

$$\varphi^*=\frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{M_\circ\cos\theta R_2^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\left[Z^2+R_2^2-2R_2Z\cos\theta\right]^{\frac12}}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{-M_\circ\cos\theta R_1^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\left[Z^2+R_1^2-2R_1Z\cos\theta\right]^{\frac12}}$$

با تغییر متغیر $\cos\theta=u$ و با استفاده از انتگرال روبرو داریم:

$$\int\frac{u\,du}{\sqrt{au+b}}=\frac{2(au-2b)}{3a^2}\sqrt{au+b}$$

$$\varphi^*=\frac{-M_\circ R_2^2}{2}\left[\frac{2(-2R_2Z\cos\theta)-2(Z^2+R_2^2)}{12R_2^2Z^2}\sqrt{z^2+R_2^2-2R_2z\cos\theta}\right]_\circ^{\pi}+$$

$$+\frac{M_\circ R_1^2}{2}\left[\frac{2(-2R_1Z\cos\theta)-2(Z^2+R_1^2)}{12R_1^2Z^2}\sqrt{z^2+R_1^2-2R_1z\cos\theta}\right]_\circ^{\pi}$$

با توجه به نکات زیر، ادامهٔ مسئله کار ساده‌ای است.

$$\sqrt{Z^2+R_2^2\pm2R_2Z\cos\theta}=|Z\pm R_2|$$

$$\sqrt{Z^2+R_1^2\pm2R_1Z\cos\theta}=|Z\pm R_1|$$

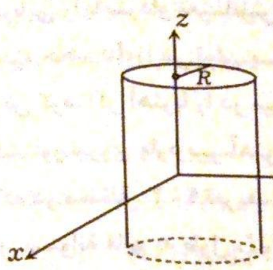
$$Z<R_1\to\begin{cases}|Z\pm R_2|=\pm(Z\pm R_2)\\|Z\pm R_1|=\pm(Z\pm R_1)\end{cases}$$

$$R_1<Z<R_2\to\begin{cases}|Z\pm R_2|=\pm(Z\pm R_2)\\|Z\pm R_1|=+(Z\pm R_1)\end{cases}$$

$$Z>R_2\to\begin{cases}|Z\pm R_2|=+(Z\pm R_2)\\|Z\pm R_1|=+(Z\pm R_1)\end{cases}$$

۹-۷- یک آهنربای دائمی به شکل استوانهٔ قائم به طول L و به شعاع R طوری قرار داده شده که محور تقارن آن بر محور z منطبق است. مبدأ مختصات در مرکز آهنربا قرار دارد. اگر استوانه بردار مغناطش محوری یکنواختی برابر M داشته باشد. (الف) $\varphi^*(z)$ را بر روی نقاط واقع بر محور تقارن، هم در داخل و هم در خارج آهنربا محاسبه کنید، و (ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) میدان مغناطیسی B_z را بر روی محور تقارن، در داخل و خارج آهنربا محاسبه کنید.

حل:



$$\vec M=M_\circ\hat k$$

الف)

$$\vec M=M_\circ\hat k\quad\to\rho_M=-\vec\nabla\cdot\vec M=\circ$$

$$\sigma_M=\vec M\cdot\hat n\to\begin{cases}\sigma_M=M_\circ & \text{قاعدهٔ بالایی}\\\sigma_M=\circ & \text{سطح جانبی}\\\sigma_M=-M_\circ & \text{قاعدهٔ پایینی}\end{cases}$$

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_M\,dV'}{|\vec r-\vec r'|}+\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$\vec r=Z\hat k\ ,\ \vec r'=r\hat r_\circ\pm Z\hat k=r\hat r_\circ\pm\frac{L}{2}\hat k\ ,\ da=r\,dr\,d\varphi$$

$$|\vec r-\vec r'|=\left[r^2+(Z\mp(\frac{L}{2}))^2\right]^{\frac12}$$

$$\varphi^*(r)=\frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R}\frac{M_\circ r\,dr\,d\theta}{\left[r^2+(Z-\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R}\frac{(-M_\circ)r\,dr\,d\theta}{\left[r^2+(Z+\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}}$$

$$=\frac{M_\circ}{2}\left[r^2+(Z-\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}\Bigg|_\circ^R-\frac{M_\circ}{2}\left[r^2+(Z+\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}\Bigg|_\circ^R$$

$$=\frac{M_\circ}{2}\left\{\left[R^2+(Z-\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}-\left[R^2+(Z+\frac{L}{2})^2\right]^{\frac12}\right\}$$

$$+\frac{M_\circ}{2}\left\{-\left|Z-\frac{L}{2}\right|+\left|Z+\frac{L}{2}\right|\right\}$$

با محاسبهٔ قدر مطلقها در نواحی مختلف ($\circ<Z<\frac{L}{2}\ ,\ Z>\frac{L}{2}$ و $Z<\frac{-L}{2}\ ,\ \frac{-L}{2}<Z<\circ$)، φ^* در داخل و خارج به آسانی بدست می‌آید.

ب)

$$\left.\begin{aligned}\vec H&=-\vec\nabla\varphi^*\\\vec B&=\mu_\circ(\vec H+\vec M)\end{aligned}\right\}\to\vec B=-\mu_\circ\vec\nabla\varphi^*+\mu_\circ\vec M$$

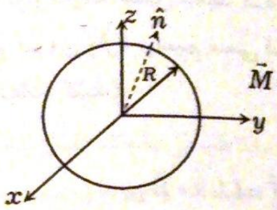
$$\vec B_{out}(Z)=\mu_\circ\left(-\frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial Z}+\circ\right)$$

$$\vec B_{in}(Z)=\mu_\circ\left(-\frac{\partial\varphi^*_{in}}{\partial Z}+M\right)$$

Physicsclass.blogsky.com

۹-۸- کره‌ای از یک مادهٔ مغناطیسی به شعاع R، در مبدأ مختصات قرار دارد. بردار مغناطش به صورت $M=(ax^2+b)\hat{i}$ است که در آن a و b مقادیری ثابت‌اند. کلیهٔ چگالی قطب مغناطیسی و جریانهای مغناطش را محاسبه کنید.

حل:



$\vec{M}=(ax^2+b)\hat{i}$

چگالی‌های قطب مغناطیسی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\rho_M=-\vec{\nabla}.\vec{M}=-\frac{\partial M_x}{\partial x}=-2ax$$

$$\sigma_M=\vec{M}.\hat{n}=\vec{M}.\hat{r}_0=$$

$$(ax^2+b)\hat{i}.(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k})=$$

$$=(ax^2+b)\sin\theta\cos\varphi$$

و چگالی‌های جریان مغناطش به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ax^2+b & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\vec{J}_M=\vec{M}\times\hat{n}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ax^2+b & 0 & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$-\left[(ax^2+b)\cos\theta\right]\hat{j}+\left[(ax^2+b)\sin\theta\sin\varphi\right]\hat{k}$$

۹-۹- چنبره‌ای از جنس آهن نرم تابکاری شده دارای طول متوسط $1\,m$ بوده و ۱۰۰ دور سیم به دور آن پیچیده شده است. جریان لازم برای مغناطیده کردن این چنبره تا میدانی به قدرت (الف) $B=1{,}0T$ و (ب) $B=1{,}5T$ را محاسبه کنید.

حل:

با استفاده از قانون آمپر بر روی مسیر نقطه چین خواهیم داشت:

$$\oint\vec{H}.\vec{dl}=NI\ \Rightarrow\ H=\frac{NI}{L}$$

چون مواد فرو مغناطیسی، مواد خطی نیستند، بنابراین برای محاسبهٔ B از روی H باید از منحنی مغناطیش آن‌ها استفاده کرد. با توجه به شکل (۹-۵) داریم:

$$B=1(T)\ \Rightarrow\ H\approx 140(A/m)\ \Rightarrow\ I=\frac{HL}{N}=\frac{140\times 0/1}{100}=0/14(A)$$

$$B=1/5(T)\ \Rightarrow\ H\approx 530(A/m)\ \Rightarrow$$

$$I=\frac{HL}{N}=\frac{530\times 0/1}{100}=0/53(A)$$

۹-۱۰- حلقه‌ای از جنس آهن نرم که یک شکاف هوای یک سانتی متری دارد، مانند شکل ۱۶-۹ به صورت یک چنبرهٔ سیم پیچی شده است. طول متوسط حلقهٔ آهن ۲۰ سانتی متر، سطح مقطع آن ۴ سانتی‌متر مربع و تراوایی آن $3000\mu_0$ است که فرض می‌شود ثابت است. از سیم پیچ چنبره‌ای که شامل ۲۰۰ دور سیم است، یک جریان ۱۰ آمپری می‌گذرد. B و H را در داخل حلقهٔ آهن و در شکاف هوا به دست آورید.

حل: با استفاده از قانون آمپر و درنظر گرفتن اندیس i برای آهن و اندیس g برای شکاف داریم:

$$\oint_c\vec{H}.\vec{dl}=NI\quad\rightarrow\quad H_iL_i+H_gL_g=NI\qquad(1)$$

که c، مسیر دایره‌ای هم محور با سوراخ درون چنبره است.

و از پایستگی شار مغناطیسی داریم:

$$\Phi_i=\Phi_g\ \rightarrow\ B_iA_i=B_gA_g\ \rightarrow\ B_i=B_g\qquad(2)$$

چون μ_i ثابت فرض شده است

$$\rightarrow\mu_iH_i=\mu_0H_g\ \rightarrow\ H_g=\frac{\mu_iH_i}{\mu_0}\qquad(3)$$

$$(1),(3)\rightarrow H_iL_i+\frac{\mu_iH_i}{\mu_0}L_g=NI\rightarrow H_i=\frac{NI}{\left[L_i+\frac{\mu_i}{\mu_0}L_g\right]}\qquad(4)$$

$$(2),(4)\rightarrow B_i=B_g=\mu_iH_i=\frac{\mu_iNI}{\left[L_i+\frac{\mu_i}{\mu_0}L_g\right]}$$

برای حل عددی، کافی است مقادیر عددی را جایگزین کنیم.

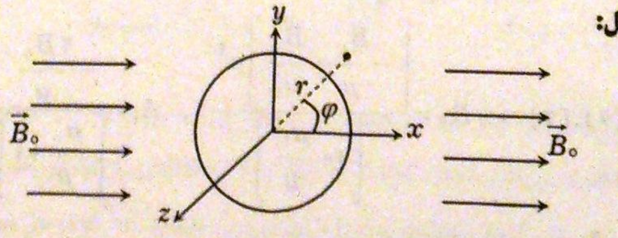
$\mu_i=3000\mu_0\qquad NI=200\times 10$ (دور - آمپر)

$L_i=20-1=19\ cm\qquad L_g=1cm$

$A_i=A_g=4\ cm^2$

۹-۱۱- استوانه‌ای طویل به شعاع a و تراوایی μ را در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار می‌دهیم، به طوری که محور استوانه عمود بر B_0 باشد. (الف) میدان مغناطیسی داخل استوانه را محاسبه کنید. (ب) با یک ترسیم نیمه کمی نمونه‌ای از خطوط میدان را در داخل استوانه نشان دهید. (از ابتدا فرض کنید که φ^* را می‌توانیم بر حسب هماهنگهای استوانه‌ای $\cos\theta$ به طور کامل مشخص کنیم. چنین فرضی موجه است زیرا تمام شرایط مرزی را می‌توان بر حسب هماهنگهای $\cos\theta$ برآورده کرد).

حل:



چون $\vec{B}_0=B_0\hat{i}$ است و همچنین بدلیل اینکه در $r\rightarrow\infty$، φ^* تابعی از x است، می‌توان نتیجه گرفت که تنها جملات $\cos$ ی را باید در نظر گرفت و

Physicsclass.blogsky.com

با درنظر گرفتن شرایط مرزی حاکم می‌توان فهمید که $\varphi^*_{out}, \varphi^*_{in}$ شامل ترم‌های cos ی به ازای $n \geq 2$ نیستند، بنابراین:

$$\varphi^*_{in} = A_1 r\cos\theta + B_1\frac{\cos\theta}{r} \qquad (1)$$

$$\varphi^*_{out} = A_2 r\cos\theta + B_2\frac{\cos\theta}{r} \qquad (2)$$

در $r \to 0$، φ^*_{in} نباید بینهایت شود، بنابراین باید $B_1 = 0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B}_0 = B_0\hat{i} \to \vec{H} = \frac{B_0}{\mu_0}\hat{i}\\ \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi^*\end{array}\right\}\to$$

$$\varphi^*_{out}(r\to\infty) = -\frac{B_0}{\mu_0}x = -\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta \qquad (3)$$

$$(2),(3) \to A_2 = -\frac{B_0}{\mu_0}$$

در سطح استوانه چگالی جریان سطحی نداریم، بنابراین باید مؤلفهٔ مماسی H پیوسته باشد:

$$J=0 \to H_{1t}\big|_{r=a} = H_{2t}\big|_{r=a} \to -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*_{in}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} \qquad (4)$$

$$\begin{cases}\varphi^*_{in} = A_1 r\cos\theta\\ \varphi^*_{out} = -\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta + B_2\frac{\cos\theta}{r}\end{cases} \qquad (5)$$

$$(4),(5) \to -A_1 r\sin\theta\big|_{r=a} = \frac{B_0}{\mu_0}r\sin\theta - B_2\frac{\sin\theta}{r}\bigg|_{r=a}$$

$$\to A_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{B_2}{a^2} \qquad (6)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \to \mu\frac{\partial\varphi^*_{in}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \mu_0\frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

$$\Rightarrow \mu A_1\big|_{r=a} = -B_0 - \mu_0\frac{B_2}{r^2}\bigg|_{r=a}$$

$$\to A_1 = -\frac{B_0}{\mu} - \frac{\mu_0}{\mu}\frac{B_2}{a^2} \qquad (7)$$

$$(6),(7) \to B_2 = \frac{\left[-\frac{B_0}{\mu} + \frac{B_0}{\mu_0}\right]a^2}{\left[1+\frac{\mu_0}{\mu}\right]}, \quad A_1 = \frac{-\frac{2B_0}{\mu}}{\left[\frac{\mu_0}{\mu}+1\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^*_{in} = A_1 r\cos\theta = A_1 x\\ \vec{H}_{in} = -\vec{\nabla}\varphi^*_{in}\\ \vec{B}_{in} = \mu\vec{H}_{in}\end{array}\right\} \to \vec{B}_{in} = -\mu\frac{\partial\varphi^*_{in}}{\partial x} = \frac{2\mu\vec{B}_0}{[\mu_0+\mu]}$$

(ب) با توجه به قسمت (الف)، خطوط میدان در داخل استوانه یکنواخت و در راستای x (موازی با میدان اولیه) است.

۹-۱۲- یک سیم مسی مستقیم و طویل و یک سیم آهنی مستقیم و طویل، هر یک جریان یکسان I را حمل می‌کنند و در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار دارند. نشان دهید که نیروی وارد بر سیم آهنی تقریباً دو برابر نیروی وارد برسیم مسی است. (راهنمایی: از نتیجهٔ مسئله ۱۱-۹ استفاده کنید).

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} \to \vec{F} = IL\hat{k}\times\vec{B}_{in}\\ \vec{B}_{in} = \frac{2\mu}{[\mu_0+\mu]}\vec{B}_0 \text{ : (9-11) با توجه به نتیجه مسئله}\end{array}\right\}\to$$

$$\vec{F} = ILB_{in}\hat{k}\times\hat{i}$$

$$\vec{F} = ILB_{in}\hat{j} = \frac{2\mu ILB_0}{[\mu_0+\mu]}\hat{j} \to$$

$$\frac{F(Fe)}{F(Cu)} = \frac{\mu_{Fe}(\mu_0+\mu_{Cu})}{\mu_{Cu}(\mu_0+\mu_{Fe})} = \frac{1+\frac{\mu_0}{\mu_{Cu}}}{1+\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}}} \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم که:

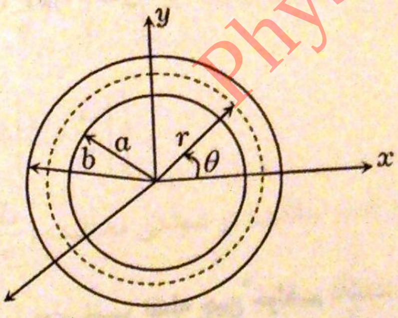
$$\mu_{Fe} >> \mu_0 \quad \to \quad \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} \approx 0 \qquad (2)$$

$$\chi_{Cu} = -0.98\times10^{-5} \to \mu_{Cu} = \mu_0(1+\chi_{Cu}) \approx \mu_0 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \to \frac{F(Fe)}{F(Cu)} \approx \frac{1+1}{1+0} \to F(Fe) = 2F(Cu)$$

۹-۱۳- یک سیم حامل جریان I در یک لولهٔ آهنی استوانه‌ای شکل قرار دارد. شعاع‌های داخلی و خارجی لوله a و b، پذیرفتاری ثابت آن X و با سیم هم محور است. چگالی جریان مغناطش و کل جریان مغناطش را پیدا کنید.

حل:



$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = I \quad \to \quad H\,2\pi r = I \quad \to \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad \to \quad \vec{M} = \chi\frac{I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} \to \vec{J}_M = \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{r\chi I}{2\pi r} & 0\end{vmatrix} = 0$$

Physicsclass.blogsky.com

$\vec{j}_M = \vec{M}\times\hat{n} \to$

$\vec{j}_{M_1} = \frac{\chi I}{2\pi r}\hat{\theta}\times\hat{r}\Big|_{r=b} = -\frac{\chi I}{2\pi b}\hat{k}$ $(r=b)$ بر روی سطح خارجی

$\vec{j}_{M_2} = \frac{\chi I}{2\pi r}\hat{\theta}\times(-\hat{r})\Big|_{r=b} = \frac{\chi I}{2\pi a}\hat{k}$ $(r=a)$ بر روی سطح داخلی

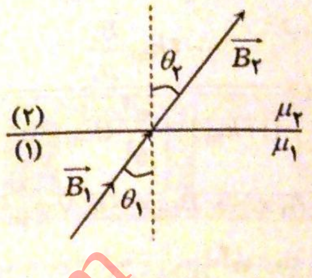
$I_M(r=b) = j_{M_1}\times(2\pi b) = -\chi I$

$I_M(r=a) = j_{M_2}\times(2\pi a) = \chi I$

۹-۱۴- دو محیط مغناطیسی با یک فصل مشترک مسطح از یکدیگر جدا شده‌اند. نشان دهید که زاویه‌های بین بردار عمود بر فصل مشترک و بردارهای میدانهای مغناطیسی در دو طرف آن، در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$\mu_2\tan\theta_1 = \mu_1\tan\theta_2$

حل:



$B_{1n} = B_{2n} \to B_1\cos\theta_1 = B_2\cos\theta_2$ (۱)

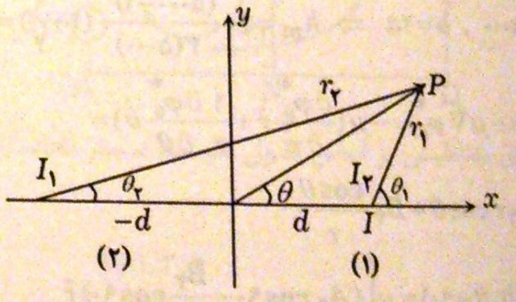
$H_{1t} = H_{2t} \to \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \to$

$\mu_2 B_1\sin\theta_1 = \mu_1 B_2\sin\theta_2$ (۲)

(۱),(۲) $\to \mu_2\tan\theta_1 = \mu_1\tan\theta_2$

۹-۱۵- سیمی مستقیم، که حامل جریان I است، موازی صفحه‌ای نامتناهی و به فاصلهٔ d از آن قرار گرفته است. یک طرف صفحه هواست و سیم در آن قرار دارد، و طرف دیگر صفحه محیطی است با تراوایی ثابت μ. جریان تصویری را پیدا کنید که میدان مغناطیسی صحیح را در هوا به دست می‌دهد، هنگامی که (الف) $\mu=\infty$، (ب) $\mu=0$ باشد. (حالت (الف) تقریبی از مادهٔ فرومغناطیسی است و (ب) ابررسانا را توصیف می‌کند).

حل:



پتانسیل اسکالر یک سیم مستقیم طویل حامل جریان I واقع بر محور zها برابر است با:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} = -\mu_0\vec{\nabla}\left(-\frac{I}{2\pi}\theta\right) = -\mu_0\vec{\nabla}\varphi^* \Rightarrow \varphi^* = -\frac{I}{2\pi}\theta$$

بنابراین پتانسیل اسکالر هر محیط به صورت زیر خواهد شد:

$$\varphi_1^* = -\frac{I}{2\pi}\theta_1 - \frac{I_1}{2\pi}\theta_2 \qquad (x>0)$$

$$\varphi_2^* = -\frac{I_2}{2\pi}\theta_1 \qquad (x<0)$$

و میدان مغناطیسی در هر ناحیه به صورت زیر است:

$$\vec{B_1} = -\mu_1\vec{\nabla}\varphi_1^* = \frac{\mu_1 I}{2\pi r_1}\hat{\theta}_1 + \frac{\mu_1 I_1}{2\pi r_2}\hat{\theta}_2$$

$$= \frac{\mu_1 I}{2\pi r_1}(-\sin\theta_1\hat{i} + \cos\theta_1\hat{j}) + \frac{\mu_1 I_1}{2\pi r_2}(-\sin\theta_2\hat{i} + \cos\theta_2\hat{j})$$

$$\vec{B_2} = -\mu_2\vec{\nabla}\varphi_2^* = \frac{\mu_2 I_2}{2\pi r_1}\hat{\theta}_1 = \frac{\mu_2 I_2}{2\pi r_1}(-\sin\theta_1\hat{i} + \cos\theta_1\hat{j})$$

$$r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

با توجه به اینکه در فصل مشترک $(x=0)$، $(r_1=r_2)$ و $\theta_1+\theta_2=\pi$، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم، بنابراین:

$B_{1n}|_{x=0} = B_{2n}|_{x=0} \Rightarrow B_{1x}|_{x=0} = B_{2x}|_{x=0} \Rightarrow$

$\mu_1(I+I_1) = \mu_2 I_2$ (۱)

$H_{1t}|_{x=0} = H_{2t}|_{x=0} \Rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \Rightarrow$

$\frac{B_{1y}}{\mu_1} = \frac{B_{2y}}{\mu_2} \Rightarrow I - I_1 = I_2$ (۲)

(۱) , (۲) $\Rightarrow I_1 = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I \ , \ I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I$

اگر ناحیه (۱) هوا $(\mu_1=\mu_0)$ و ناحیهٔ (۲) محیطی با تراوایی $(\mu_2=\mu)$ باشد، داریم:

$I_1 = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0+\mu} \ , \ I_2 = \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu}I$

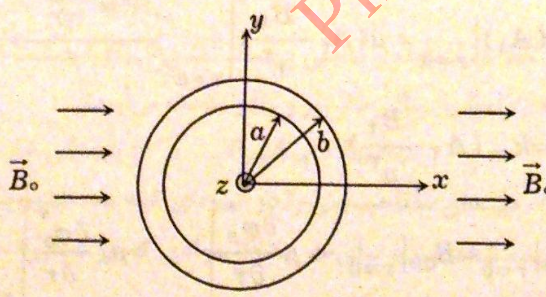
الف) $\mu\to\infty \Rightarrow I_1 = I \ , \ I_2 = 0$

ب) $\mu=0 \Rightarrow I_1 = -I \ , \ I_2 = 2I$

۹-۱۶- یک پوستهٔ استوانه‌ای طویل (شعاع خارجی b، شعاع داخلی a و تراوایی نسبی K_m) در امتداد عمود بر میدان مغناطیسی B_0 قرار گرفته است. الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی B_i در ناحیهٔ خلأ در داخل پوسته با B_0 موازی است. ب) نشان دهید که ضریب حافظ مغناطیسی به صورت زیر است

$$h_m = \frac{B_0}{B_i} = 1 + \frac{(K_m-1)^2}{4K_m}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)$$

حل:



چون $\vec{B}_0 = B_0\hat{i}$ است و همچنین بدلیل اینکه در $r\to\infty$ ، φ^* تابعی از x است، می‌توان نتیجه گرفت که تنها جملات cos ی را باید در نظر گرفت، و با در نظر گرفتن شرایط مرزی حاکم می‌توان فهمید که φ^* در هر سه ناحیه شامل ترمهای cos ی به ازای $n\geq 2$ نیستند، بنابراین:

Physicsclass.blogsky.com

$$\begin{cases}\varphi^*_{in}=A_1 r\cos\theta+B_1\frac{\cos\theta}{r}\\ \varphi^*_{shell}=A_2 r\cos\theta+B_2\frac{\cos\theta}{r}\\ \varphi^*_{out}=A_3 r\cos\theta+B_3\frac{\cos\theta}{r}\end{cases}$$

در $r\to 0$ ، φ^*_{in} نباید بینهایت شود، بنابراین باید $B_1=0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\vec B_0=\vec B_0\hat i\to\vec H=\frac{B_0}{\mu_0}\hat i\\ \vec H=-\vec\nabla\varphi^*\end{array}\right\}\to$$

$$\varphi^*_{out}(r\to\infty)=-\frac{B_0}{\mu_0}x=-\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta$$

$$\to A_3=-\frac{B_0}{\mu_0}$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت دیگر پتانسیلها باید شرایط مرزی حاکم برمسئله را اعمال می‌کنیم، بنابراین:

در مرزها چگالی جریان سطحی انتقالی نداریم، بنابراین باید مؤلفهٔ مماسی H پیوسته باشد:

$$J=0\to H_{it}\big|_{r=a}=H_{st}\big|_{r=a}\to$$

$$\varphi^*_i(r=a)=\varphi^*_s(r=a)\to$$

$$A_1a\cos\theta=A_2a\cos\theta+B_2\frac{\cos\theta}{a}\to A_1=A_2+\frac{B_2}{a^2}\quad(1)$$

$$J=0\to H_{st}\big|_{r=b}=H_{ot}\big|_{r=b}\to$$

$$\varphi^*_s(r=b)=\varphi^*_o(r=b)\to$$

$$A_2b\cos\theta+B_2\frac{\cos\theta}{b}=-\frac{B_0}{\mu_0}b\cos\theta+B_3\frac{\cos\theta}{b}\to$$

$$A_2+\frac{B_2}{b^2}=-\frac{B_0}{\mu_0}+\frac{B_3}{b^2}\quad(2)$$

$$B_{in}\big|_{r=a}=B_{sn}\big|_{r=a}\to\mu_0\frac{\partial\varphi^*_i}{\partial r}\Big|_{r=a}=\mu\frac{\partial\varphi^*_s}{\partial r}\Big|_{r=a}\to$$

$$\mu_0(A_1)\big|_{r=a}=\mu(A_2-\frac{B_2}{r^2})\Big|_{r=a}\xrightarrow{k_m=\frac{\mu}{\mu_0}}$$

$$A_1=k_m(A_2-\frac{B_2}{a^2})\quad(3)$$

$$B_{sn}\big|_{r=b}=B_{on}\big|_{r=b}\to\mu\frac{\partial\varphi^*_s}{\partial r}\Big|_{r=a}=\mu_0\frac{\partial\varphi^*_o}{\partial r}\Big|_{r=b}\to$$

$$\mu(A_2-\frac{B_2}{r^2})\Big|_{r=b}=\mu_0(-\frac{B_0}{\mu_0}-\frac{B_3}{r^2})\Big|_{r=b}\to$$

$$k_m(A_2-\frac{B_2}{b^2})=-\frac{B_0}{\mu_0}-\frac{B_3}{b^2}\quad(4)$$

$$(1),(3)\to A_2(1-k_m)=-(1+k_m)\frac{B_2}{a^2}\quad(5)$$

$$\to A_2=-\frac{(1+k_m)}{(1-k_m)}\frac{B_2}{a^2}\quad(6)$$

$$(2),(4)\to\frac{-2B_0}{\mu_0}=(1+k_m)A_2-\frac{B_2}{b}(k_m-1)\quad(7)$$

$$(6),(7)\to B_2=\frac{(\frac{2B_0}{\mu_0})}{\left[\frac{(1+k_m)^2}{a^2(1-k_m)}+\frac{(k_m-1)}{b^2}\right]}\quad(8)$$

$$\xrightarrow{(6)}A_2=-\frac{(1+k_m)}{(1-k_m)a^2}\frac{(\frac{2B_0}{\mu_0})}{\left[\frac{(1+k_m)^2}{a^2(1-k_m)}+\frac{(k_m-1)}{b^2}\right]}\quad(9)$$

$$(3),(8),(9)\to A_1=\frac{-4k_m\frac{B_0}{\mu_0}}{(1+k_m)^2-\frac{a^2}{b^2}(k_m-1)^2}$$

$$\varphi^*_{in}=A_1r\cos\theta=A_1x\to\vec B_{in}=-\mu_0\vec\nabla\varphi^*_{in}=-\mu_0A_1\hat i$$

$$h_m=\frac{B_0}{B_{in}}=\frac{(1+k_m)^2-\frac{a^2}{b^2}(k_m-1)^2}{4k_m}=1+\frac{(k_m-1)^2}{4k_m}(1-\frac{a^2}{b^2})$$

۹-۱۷- (الف) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۶-۹ ، ضریب حفاظ مغناطیسی h_m را برای یک پوستهٔ استوانه‌ای با تراوایی نسبی $K_m=5000$ ، شعاع خارجی b و شعاع داخلی a محاسبه کنید. b دو برابر a است. (ب) همچنین نشان دهید که میدان مغناطیسی در $\theta=90^\circ$ روی سطح خارجی پوسته، تقریباً تا ۳۳٫۳ برابر میدان مغناطیسی اولیه افزایش می‌یابد (فرض کنید میدان اولیه در امتداد $\theta=0$ قرار دارد).

حل: الف)

مسئله (۹-۱۶): $h_m=1+\frac{(k_m-1)^2}{4k_m}(1-\frac{a^2}{b^2})$

$k_m=5000\ ,\ b=2a\Rightarrow h_m=1+\frac{(5000-1)^2}{4(5000)}(1-\frac{1}{4})=$ ۹۳۸/۱۳

$$\vec B_{seu}=-\mu\vec\nabla\varphi^*_s=-\mu(\frac{\partial\varphi^*_s}{\partial r}\hat r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*_s}{\partial\theta}\hat\theta)=$$

$$\varphi^*_s=A_2r\cos\theta+B_2\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\vec B_s(r=b,\theta=90)=\mu\left[(A_2\cos90-\frac{B_2}{b_2}\cos90)\hat r+\frac{1}{b}(-A_2b\sin90-\frac{B_2}{b}\sin90)\hat\theta\right]=\mu(A_2+\frac{B_2}{b_2})\hat\theta\quad(1)$$

$$B_2=\frac{(\frac{2B_0}{b^2})\hat\theta}{\left[\frac{(1+k_m)^2}{a^2(1-k_m)}+\frac{(k_m-1)}{b^2}\right]}\Rightarrow$$

Physicsclass.blogsky.com

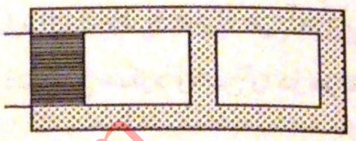
$$\frac{B_2}{b^2}=\frac{(\frac{2B_0}{\mu_0})}{\frac{b^2(1+k_m)^2}{(1-k_m)}+(k_m-1)}=-133\times10^{-6} \qquad (2)$$

$$A_2=\frac{k_m+1}{k_m-1}\frac{B_2}{a^2}=\frac{(k_m+1)b^2}{(k_m-1)a^2}\frac{B_2}{b^2}=-533\times10^{-6} \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \left|\vec{B}_s\right|=k_m(-533-133)\times10^{6}B_0\approx3/33B_0$$

۹-۱۸- یک مدار مغناطیسی مطابق شکل ۲۱-۹ با ۱۰۰ دور سیم پیچیده شده است و جریان یک آمپری از آن می‌گذرد. سیم پیچ در ساق سمت چپ مدار قرار دارد. ارتفاع مدار ۱۰ سانتی‌متر، طول آن ۲۰ سانتی‌متر، سطح مقطع هر ساق آن ۶ سانتی‌متر مربع و تراوایی آن برابر $5000\mu_0$ است که ثابت فرض می‌شود. اگر از نشت شار چشم‌پوشی کنیم، شار مغناطیسی را در ساق وسط و در ساق سمت راست مدار محاسبه کنید.

حل:



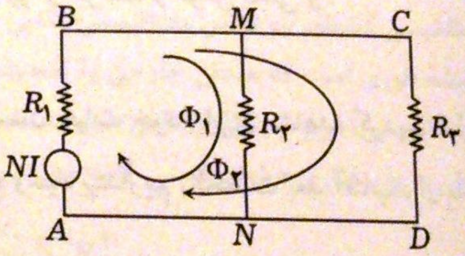
با توجه به تشابه بین مدارهای مغناطیسی و مدارهای جریان می‌توان قوانین کیرشهوف را تعمیم داد:

(۱) مشابه قانون ولتاژ کیرشهوف در هر مسیر بسته در یک مدار مغناطیسی داریم:

$$\sum_j N_j I_j=\sum_k R_k\Phi_k \qquad (\text{جمع جبری است } \Sigma) \quad (1)$$

(۲) مشابه قانون جریان کیرشهوف، در هر گره در یک مدار مغناطیسی داریم:

$$\sum_j \Phi_j=0 \qquad (\Sigma \text{، جمع جبری است.}) \quad (2)$$



مقاومت‌های مغناطیسی بر اساس طول متوسط مسیر محاسبه می‌شوند، بنابراین:

$$R_i=\frac{L_i}{\mu A} \qquad i=1,2,3$$

$$L_1=NABM \quad , \quad L_2=NDCM \quad , \quad L_3=MN$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) در دو مسیر بستهٔ شکل بالا داریم:

$$\begin{cases} \text{مسیر (۱)} : NI=(R_1+R_2)\Phi_1+R_1\Phi_2 \\ \text{مسیر (۲)} : NI=R\Phi_1+(R+R_3)\Phi_2 \end{cases}$$

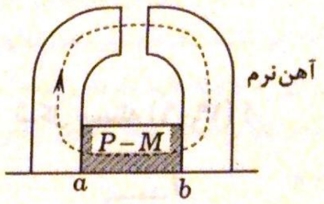
با حل دستگاه بالا، مقادیر شار مغناطیسی در ضلع وسط، Φ_1، و در ضلع سمت راست، Φ_2، بدست می‌آیند:

$$\Phi_1=\frac{NIR_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \qquad \Phi_2=\frac{NIR_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

با جایگذاری مقادیر مفروض، شارهای مغناطیسی مطلوب حاصل می‌شوند.

۹-۱۹- یک مدار مغناطیسی، مانند شکل ۱۹-۹، از یک آهنربای دائمی به طول ۸ سانتی‌متر و مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتی‌متر و یک شکاف هوا به عرض ۸ر۰ سانتی‌متر تشکیل شده است. سطح مقطع متوسط آهن و آهنربا ۴ سانتی‌متر مربع است، حال آنکه سطح مقطع مؤثر شکاف هوا ۳ سانتی‌متر مربع است. تراوایی نسبی آهن ۵۰۰۰ است. (الف) چگالی شار مغناطیسی را در شکاف، هنگامی که آهنربا از هر یک از مواد مختلف زیر ساخته شده باشد، محاسبه کنید: اکسید تفجوش و فولاد کبالتی ۳۵ درصد. از نشت شار چشم‌پوشی کنید. (ب) ابعاد مدار مغناطیسی را از یک نظر تغییر می‌دهیم: شکاف هوا را به ۰/۸ میلی متر کاهش می‌دهیم. محاسباتی را که در قسمت (الف) خواسته شده است، تکرار کنید.

حل:



برای بدست آوردن چگالی شار مغناطیسی در شکاف، ابتدا رابطهٔ خطی بین B_m و H_m در آهنربای دائم $(P-M)$ را بدست آورده و به همراه منحنی پسماند آهنربا رسم می‌کنیم. از روی نقطهٔ تقاطع آن‌ها B_m را بدست آورده و از رابطهٔ پایپستگی شار B_g، میدان مغناطیسی در شکاف، را محاسبه می‌کنیم.

$$(\text{۹-۷۴ ب}): B_m=-\frac{l_m}{A_m R_{ab}}H_m \qquad (1)$$

$$R_{ab}=\frac{l_i}{\mu_i A_i}+\frac{l_g}{\mu_0 A_g} \qquad (2)$$

با جایگذاری مقادیر مفروض داریم:

$$L_m=8Cm \quad , \quad L_i=16Cm \quad , \quad L_g=0/8Cm$$

$$A_i=A_m=4Cm^2 \;,\; A_g=3Cm^2 \;,\; k_m=\frac{\mu_i}{\mu_0}=5000$$

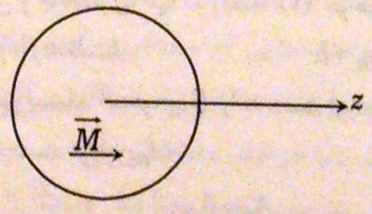
$$(1),(2) \Rightarrow B_m=CH_m$$

با رسم خط بدست آمده و منحنی پسماند آهنربا، B_m را بدست آورده و با استفاده از رابطهٔ پایستگی شار زیر و B_c را بدست می‌آوریم:

$$\text{پایستگی شار مغناطیسی} : \qquad B_m A_m=Bg\,Ag$$

۹-۲۰- میدان مغناطیسی را در کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده است، برای هر یک از موادی که در شکل ۹-۹ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

حل:



Physicsclass.blogsky.com

با توجه به معادلات (۹–۶۲) و (۹–۶۳) در کرهٔ مغناطیده داریم:

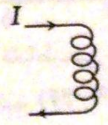
$$\left.\begin{array}{l}\vec{H}_{in}=-\frac{۱}{۳}\vec{M}\\ \vec{B}_{in}=\frac{۲}{۳}\mu_{\circ}\vec{M}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{H}{B}=-\frac{۱}{۲\mu_{\circ}} \Rightarrow B=-۲\mu_{\circ}H$$

با ترسیم خط فوق در نمودار شکل (۹–۹) و بدست آوردن نقاط تقاطع آن با منحنی‌های این شکل، میدان‌های مغناطیسی در کره‌ای از هر یک از این مواد بدست می‌آید.

۹–۲۱– یک مدار مغناطیسی مانند شکل ۱۹–۹ آهنربایی از جنس آلنیکو V به طول ۱۰ سانتی‌متر، مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتی‌متر و شکاف هوایی به عرض یک سانتی‌متر دارد. همچنین این مدار ۸۰۰ آمپر – دور سیم‌پیچ دارد (در جهتی که به شار تولید شده توسط آهنربا کمک می‌کند). چگالی شار مغناطیسی را در شکاف هوا پیدا کنید (از نشت شار چشمپوشی کنید، برای آهن نرم $K_m=۵۰۰۰$ است، و فرض کنید که سطح مقطعهای آهنربا، آهن نرم و شکاف هوا یکسان‌اند).

حل:

شکل مسئله (۹–۱۹) ؟



حل این مسئله مانند مسئله (۹–۱۹) است با این تفاوت که سیم پیچ عامل تقویت مقدار B_g در شکاف است.

با توجه به قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec{H}.\vec{dL}=NI \Rightarrow H_iL_i+H_gL_g+H_mL_m=NI \qquad (۱)$$

و با استفاده از رابطهٔ پیوستگی شار خواهیم داشت:

$$B_m A_m=B_iA_i \Rightarrow H_i=\frac{B_mA_m}{\mu_iA_i} \qquad (۲)$$

$$B_gA_g=B_mA_m \Rightarrow H_g=\frac{B_mA_m}{\mu_{\circ}A_g} \qquad (۳)$$

جایگذاری این روابط، (۲) و (۳)، در رابطه (۱) داریم:

$$B_mA_m\left[\frac{L_i}{\mu_iA_i}+\frac{L_g}{\mu_{\circ}A_g}\right]+H_mL_m=NI$$

$$\Rightarrow B_mA_m R_{ab}=NI-H_mL_m$$

$$\Rightarrow B_m=\frac{NI}{A_mR_{ab}}-\frac{H_mL_m}{A_mR_{ab}} \qquad (۴)$$

که در آن $R_{ab}=\frac{L_i}{\mu_iA_i}+\frac{L_g}{\mu_{\circ}A_g}$، مقاومت مغناطیسی است.

با توجه به مقادیر مفروض و جایگذاری، آنها در رابطهٔ (۴) خواهیم داشت:

$$B_m=aH_m+b \qquad (\text{ثابت } a,b)$$

با ترسیم این خط و منحنی پسماند آلنیکو، B_m را به دست آورده و با استفاده از پایستگی شار B_g را به دست می‌آوریم:

$$B_g A_g=B_m A_m \xrightarrow{A_g=A_m} B_g=B_m$$

Physicsclass.blogsky.com